اسقاط الخرائط
MAP PROJECTION

الأستاذ الدكتور
محمد رشاد الدين مصطفى حسين
استاذ المساحة والجيوديسيا

كلية الهندسة – جامعة الاسكندرية

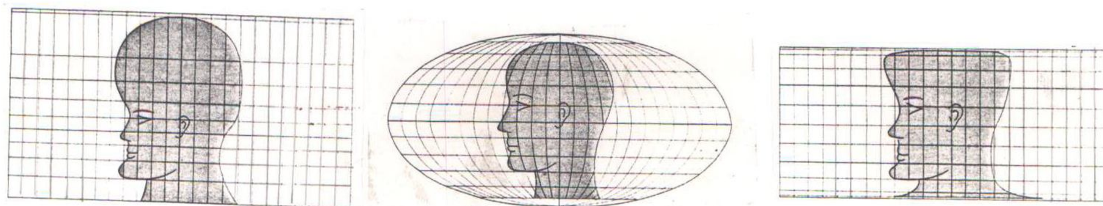
اسقاط الخرائط Map Projection

تقديم :

يختص علم اسقاط الخرائط بتمثيل المعالم الموجودة على سطح الأرض على مستوى ، وحيث أن سطح الأرض غير منتظم فانه يتم تبسيط هذا الشكل أولا بتقريبه إلى سطح هندسي أتفق أن يكون إما (١) الكرة ، (٢) الأسفرويد. وبحيث الدقة فإن أفضل سطح هو الأسفرويد ، أما إذا كانت الخرائط المطلوبة للارض سترسم بمقياس رسم أصغر من ١ : ١٠٠٠٠٠٠ فيكفى تقريب شكل الأرض إلى كرة.

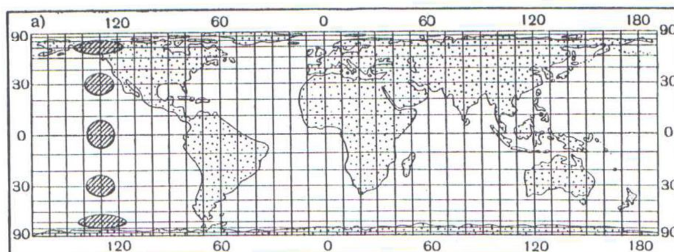
وسواء اعتبر سطح الأرض كرويا أو ذى الشكل الأسفرويدى فإنه من المستحيل تمثيل هذا السطح تمثيلا تاما على المستوى ولابد أن يظهر تشوة Distortion من نوع ما على الخريطة. وكلما صغر الجزء من سطح الأرض المطلوب اسقاطه كلما كان مقدار التشوه صغيرا. إذ انه لتمثيل شكل واقع على سطح الأرض على خريطة مستوية فإنه لابد أن تمثل المسافات على الخريطة فى أى جزء منها ما يناظرها على سطح الأرض ، وأن تمثل المساحات على الخريطة ما يناظرها على الأرض ، وكذلك أن تكون الزوايا بين الاتجاهات المرسومة على الخريطة مناظرة لنفس الزوايا بين الاتجاهات على الأرض. وهذه الشروط الثلاثة السابقة سهلة التحقيق لو كان شكل الأرض سطح مستوى (وهذا ما يحدث عند عمل الخرائط المساحية للمساحات الصغيرة) أما للشكل الكروى أو الأسفرويدى للأرض فإنه عند تمثيل التفاصيل الموجودة على الأرض على خرائط مستوية لا يمكن أن نحقق الشروط الثلاثة السابقة مجتمعة بل يحدث تشويه فى أجزاء من الخريطة. ولهذا السبب فإن كل نوع من أنواع الأسقاط يحتفظ بخاصية أو خصائص معينة وتهمل باقى الخصائص.

فلو تصورنا أننا أردنا اسقاط (بروفيل) محدد بمجموعة من خطوط الطول والعرض (شكل ١) واقع على سطح الأرض ، واستخدمنا لذلك مساقط مختلفة لكل منها خاصية معينة تحتفظ بها ، فإننا نجد أن شكل البروفيل فى المساقط المختلفة سوف يكون مختلفا. ففى الجزء الأول من شكل (١) استخدمنا اسقاط مولفايدى حيث ظهر شكل البروفيل مطابقا للواقع تقريبا. اما الشكل الأيسر فيبين البروفيل عنداستخدام اسقاط ميركاتور حيث ظهر التشوه جليا فى منطقة الرأس والرقبة فى حين كانت المنطقة القريبة من العينين خاليه تقريبا من التشوه.

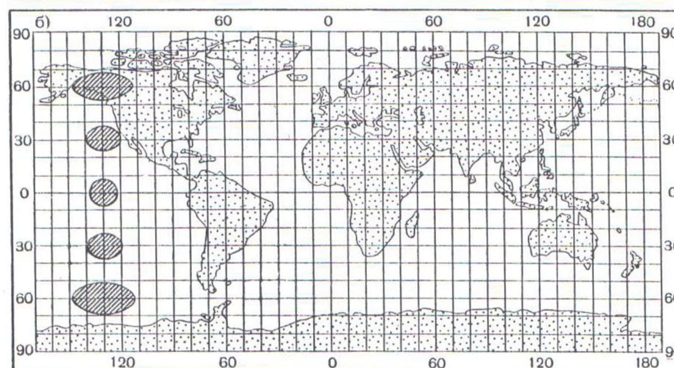


شكل (١)

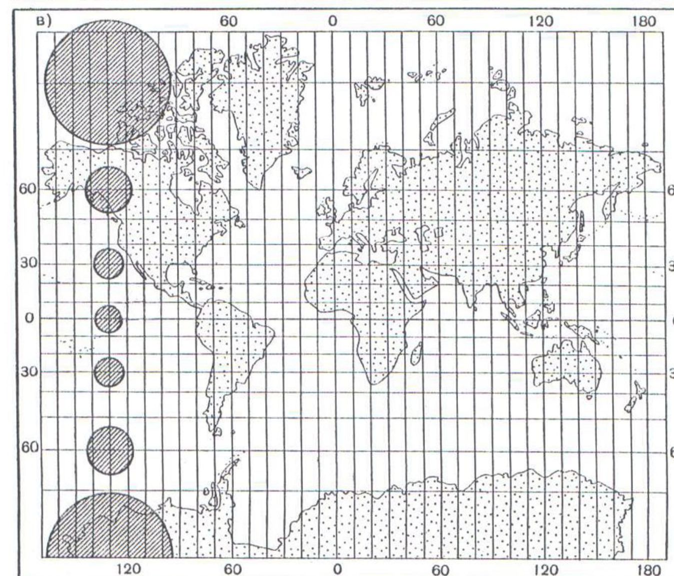
Equal - area projection



Equidistant projection



Conformal projectien



شكل (٢)

2

وفى الشكل الأيمن مثل البروفيل على اسقاط اسطوانى متساوى المساحات وبذا انعدم تماما الشعور بالزوايا والمسافات.

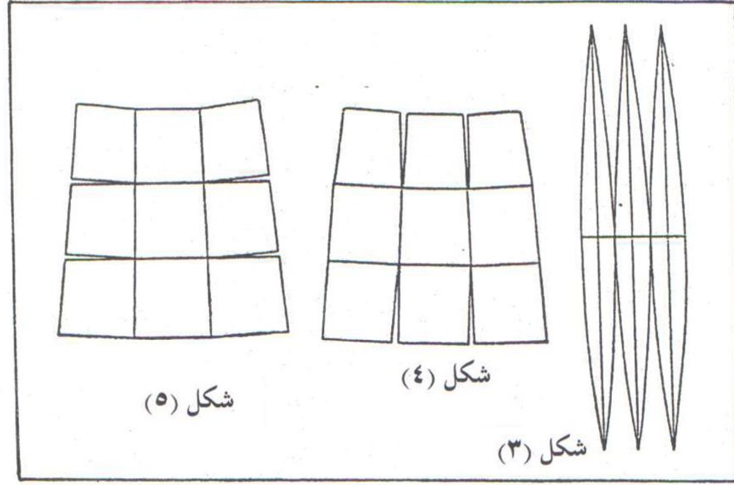
وفى شكل (٢) بيننا ثلاث خرائط لسطح الأرض اعدت بثلاثة مساقط مختلفة (الأولى بمسقط متساوى المساحات والثانية بمسقط متساوى المسافات أما الأخيرة فبمسقط اتجاهى هو مسقط ميركاتور) ونلاحظ هنا أن هناك أختلاف كبير بين التفاصيل فى الثلاثة خرائط وأن هناك دائما تشوه حادث فى المناطق القطبية فى حين أن المناطق القريبة من الأستواء قليلة التشوه نظرا لأن كل هذه المساقط أسطوانية كما سوف نشرح فيما بعد.

وعلى ذلك فإنه عند تمثيل التفاصيل الموجودة على الأرض على خرائط مستوية نجد أن هذه الخرائط لا يمكن أن تمدنا بصورة صادقة للأرض نظرا لأنه لا يمكن أن تحقق الشروط الثلاثة السابقةمجتمعة ، فكما انه لا يمكننا بسط كرة من المطاط من غير أن نمزقها ونمطها فإننا لا نستطيع اعداد خريطة للأرض من غير أن ندخل عليها نوعا ما من التشوية الناتج عن ألى أو الثنى يعادل المط والتمزق.

وفى مقدورنا أن نمثل شكل الأرض بالأقلال من هذا التشوية بعدد كبير من الطرق ، إلا أن ايا من هذه الطرق سوف يعطى نوعا من مساقط الخرائط لا يمثل الحقيقة بعينها.

ويتوقف اختيار انسب المساقط لعمل خريطة معينة للأرض (أو أجزاء منها) على عدة عوامل مثل الموضع ، وميل المسقط ، وسعة المساحة التى يراد اظهارها من الأرض ، والغرض المطلوب من الخريطة. فالخريطة ذات المقياس الكبير تمثل جزءا صغيرا فقط من سطح الأرض ، ولذلك يصبح التشويه فيها صغيرا. وأكثر الخرائط صعوبة فى التصميم تلك التى تحوى تفاصيل الأرض كلها فى لوحة صغيرة الأتساع ، وذلك نظرا لأنه من الضرورى إظهار السطح المنحنى بأكمله على هذه اللوحة.

وتتم ظاهرة التمزيق عند تمثيل الأرض بمساقط الخرائط إما بأحداث كسر صناعى على امتداد خطوط الطول الواقعة على سطح الكرة الأرضية. وذلك من القطب الشمالى حتى القطب الجنوبى كما هو مبين فىشكل (٣) ، أو على امتداد خطوط الطول لمسافات محددة بخطوط عرض معينة على سطح الكرة كما هو مبين فى شكل



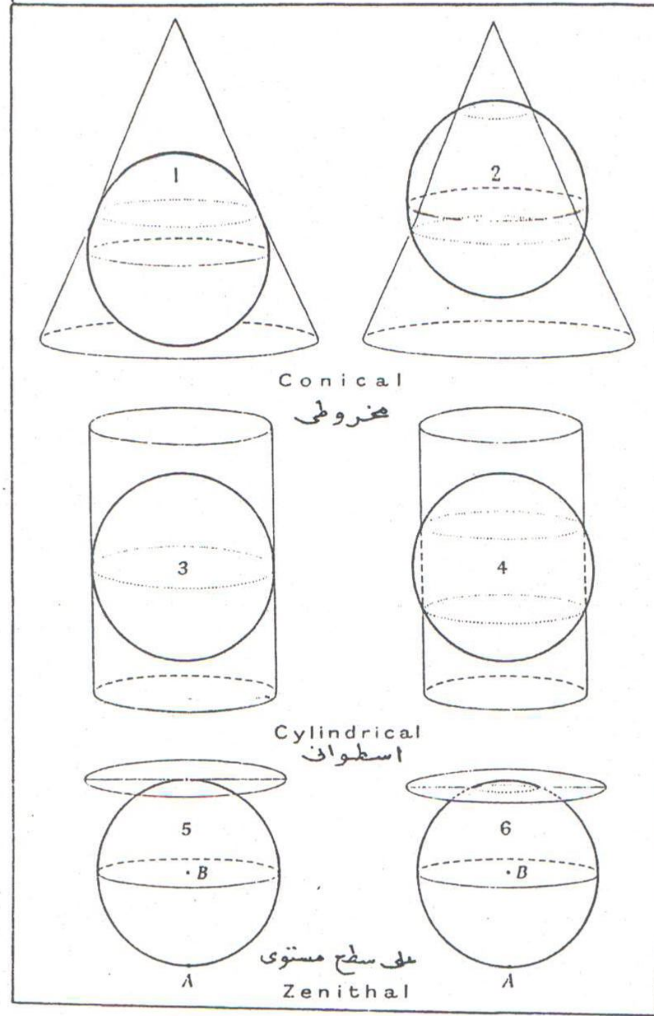
(٤) ، أو على امتداد خطوط العرض لمسافات محددة بخطوط طول معينة على سطح الكرة كما هو موضح فى شكل (٥).

أما ظاهرة المط فتتم عن طريق تغيير مقياس رسم الخريطة بحيث أنه يتغير من مكان إلى آخر أو فى الأتجاهات المختلفة فى نفس المكان.

ومن الواضح أنه لا يمكن جمع كل الخصائص فى اسقاط واحد. وتوجد مئات الأنواع من إسقاط الخرائط ولكن حوالى أربعين منها فقط شائعة الأستعمال لتوفى متطلبات معينة فى الخريطة المطلوبة. ويختار نوع الأسقاط تبعا للغرض المطلوب من الخريطة بحيث تكون الخصائص الموجودة فى هذا النوع ملائمة.

الطرق المختلفة لأسقاط الخرائط

إن أساس إسقاط سطح الكرة الأرضية (أو السطح الأسفرويدى للأرض) بغرض عمل خرائط لها أو لجزء منها هو إسقاطها على سطح مخروطى زاوية رأسه متغيرة ، وتأخذ فيما تتراوح بين صفر ، ١٨٠ ° بحيث يكون ماسا للسطح الكروى أو قاطعا له ، فلو أعتبرنا أن الشكل التقريبى للأرض هو كرة شكل (٦) فإنه يمكننا وضع مخروط ورقى على سطح الكرة بحيث يأخذ إحدى الأوضاع الستة المبينة فى شكل (٦) فالوضع الأول يبين مخروط له زاوية رأس معينة يمس السطح الكروى على امتداد أحد خطوط العرض (دائرة تماس) فى حين أن الوضع الثالث يبين حالة المخروط عندما أصبحت زاوية الرأس له مساوية الصفر (أسطوانة) ويمس الكرة أيضا



شكل (٦)

على امتداد دائرة عظمى فيها. أمـا الحالـة الخامسـة فتبيـن المخـروط عندمـا صـارت زاويـة الـرأس لـه ١٨٠ °
(مستوى) ويمس الكرة فى نقطة. أما الحـالات الثانيـة والرابعـة والسادسـة فتبيـن حـالات استخدام المخـروط
بحيث يكون قاطعا للكرة فى دائرتين أو دائرة واحدة.

وكما هو معلوم فإنه فى عمليات الأسقاط المختلفة لابد وأن يكـون هنـاك مركـز للأسـقاط ، هـذا المركـز فـى
الحالات (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) المبينة بشكل (٦) هو عبارة عن مركز الكرة أما فى الحالات (٥ ، ٦) فإن مركـز
الإسقاط يقع عادة على الخط العمودى على مستوى الاسقاط ومارا بمركز الكرة وقـد يكـون هـو نفسـه مركـز

الكرة (النقطة B) أو يقع على سطح الكرة فى الجهة المقابلة لمركز الخريطة (النقطة A) أو فى أى موضع آخر حسب ظروف معينة كما سوف نوضح فيما بعد.

وعلى ضوء هذا فإن الطرق المختلفة للأسقاط يمكن إسنادها إلى إحدى الحالات الآتية :

١ - إسقاط مخروطى ذو دائرة رئيسية واحدة Conical Projection.

٢ - إسقاط مخروطى ذو دائرتين رئيسيتين.

٣ - إسقاط أسطوانى ذو دائرة رئيسية واحدة Cylindrical.

٤ - إسقاط أسطوانى ذو دائرتين رئيسيتين.

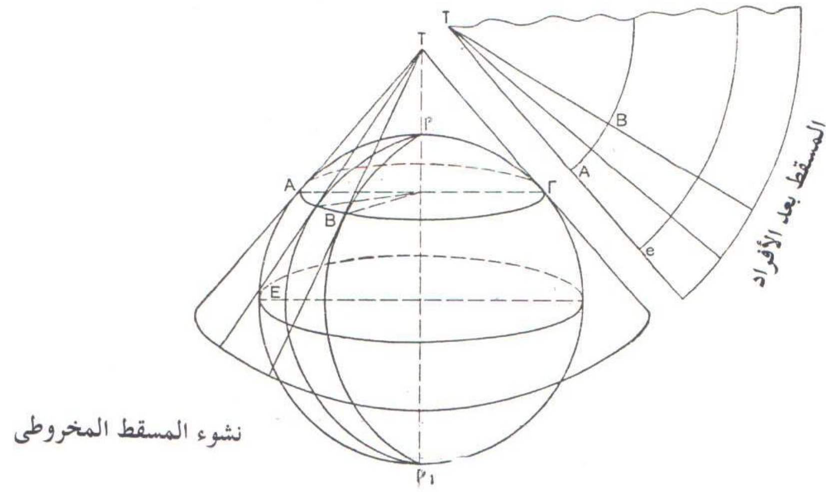
٥ - إسقاط Zenithal مركزه يقع فى الجهة المقابلة لمركز الخريطة (ويطلق عليه (الإسقاط الأستريوجرافيكى).

٦ - إسقاط أتجاهى مركزه هو الكرة (ويطلق عليه الأسقاط الجونومونى).

وبالطبع فإن الأسقاط الحقيقى لشكل ألأرض يتم بالأخذ فى الاعتبار الشكل الأسفرويدى للأرض وبنفس الطرق المتبعة لأسقاط السطح الكروى.

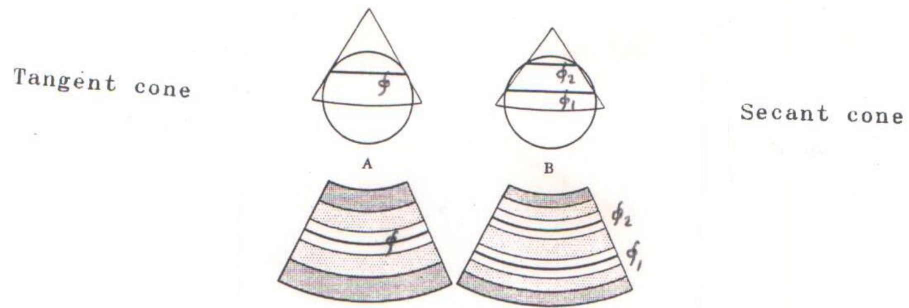
المساقط المخروطية Conical Projections

لأنشاء المساقط المخروطية نتصور أنه قد تم لف صحيفة من الورق تمثل الخريطة حول دائرة صغرى من الدوائر الواقعة على سطح الأرض (أى على امتداد خط عرض أعلى اوأسفل الأستواء) بحيث تكون على شكل مخروط (شكل ٧) بحيث يتم اسقاط التفاصيل الواقعة على الأرض - إلى سطح المخروط ثم يتم فرد السطح الجانبى للمخروط فينجم عن ذلك مسقط مروحى الشكل وهو ما نطلق عليه المسقط المخروطى والخريطة الناتجة يكون مقياس رسمها صادقا وحقيقيا على طول خط العرض التى يمسى فيه المخروط سطح الأرض ، والذى يعرف بخط العرض القياسى أو خط الأوسط (Standard Parallel) ، ثم يبدأ فى التغيير ويحدث التشوية كلما اتجهنا ناحية الأستواء أو ناحية القطب ، وهذا موضح فى شكل (A-٨) حيث المخروط يمس الأرض على امتداد خط العرض وفى الأفراد فإن المنطقة القريبة من خط العرض يكون التشويه فيها أقل ما يمكن



T
T
A
B
Γ
E
A
B
e
نشوء المسقط المخروطى
المسقط بعد الأفراد

شكل (٧)



Tangent cone
Secant cone
A
B

شكل (٨)

(المنطقة غير المظلله) ثم تزواد قيمة التشوية كلما اتجهنا شمالا أو جنوبا من خط العرض ϕ ويكون أكبر ما يمكن بالقرب من الأستواء أو من القطب (لاحظ شكل التظليل - أقل كثافة بالقرب من المنطقة الوسطى وأكثر كثافة عند الأطراف) وعند استخدام الأسقاط المخروطى الذى يقطع الأرض على امتداد خطى العرض ϕ_1 ، ϕ_2 يكون مقياس الرسم حقيقيا على امتداد ϕ_1 ، ϕ_2 بحيث تكون المناطق المحيطة بخطى العرض القاطعين التشوية فيها أقل ما يمكن (المناطق غير المظلله فى شكل ٨ - B) ثم يأخذ التشوية فى الزيادة بعيدا عن هذه الخطوط.

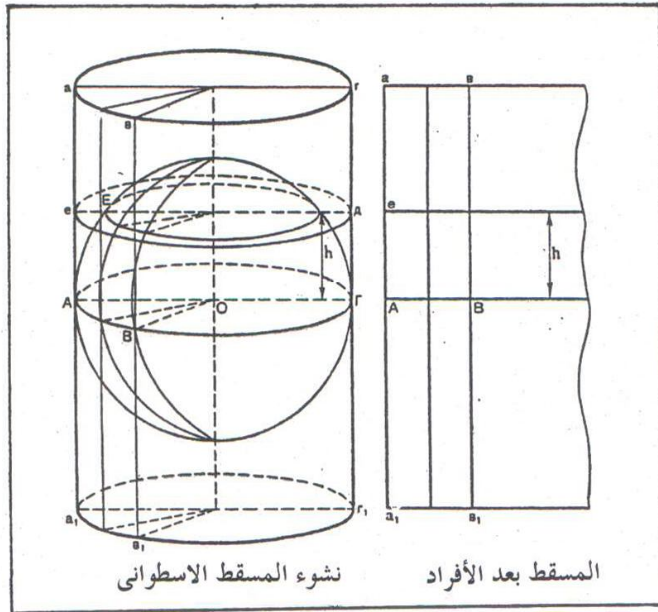
وعموما فإنه فى المساقط المخروطية العادية تظهر خطوط العرض فى المسقط على هيئة دوائر مركزها واحد (رأس المخروط) فى حين تظهر خطوط الطول على شكل خطوط مستقيمة تمر بنقطة المركز هذه وتتباعد عن بعض زاويا بمقدار ثابت (شكل ٧ فى الأفراد) وسوف نتعرض لذلك تفصيلا فيما بعد.

المساقط الأسطوانية Cylindrical Projections

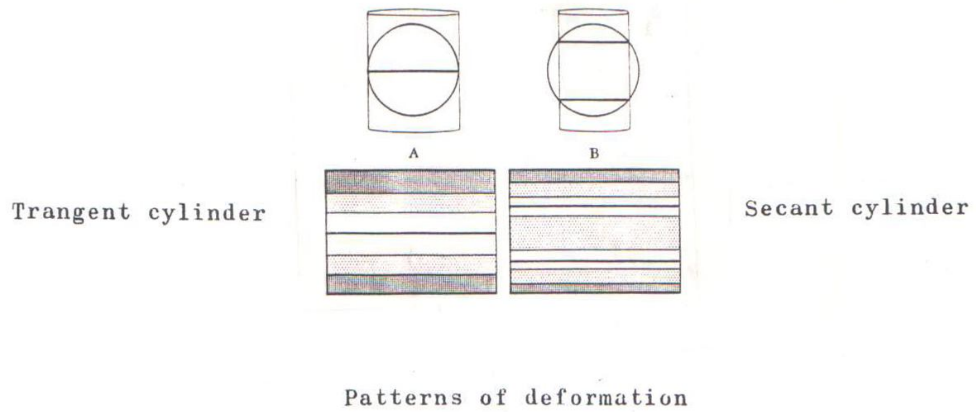
ينشأ المسقط الأسطوانى عن طريق تصور أن صحيفة الخريطة قد لفت حول دائرة عظمى على الكرة الأرضية (على غرار خط الأستواء مثلا) ، وهذه تعطى مسقطا أسطوانيا على شكل مستطيل تظهر فيه خطوط الطول والعرض متعامدة ، ويحتفظ بالمقياس الحقيقى على طول الخط الممثل لدائرة التماس (خط الأستواء فى حالة الأسقاط الأسطوانى العادى الذى محوره هو محور الأرض). وفى شكل (٩) موضح أساس نشوء مثل هذا النوع من الأسقاط الأسطوانى.

ومقياس الرسم يكون حقيقا على امتداد دائرة التماس العظمى (شكل ١٠ - A) حينما يكون الأسقاط اسطوانى مماس للأرض ، أو حقيقيا على امتداد دائرتى التقاطع العظمتين (شكل ١٠ - B) وذلك عند استخدام اسطوانة قاطعة للأرض. وإلى الشمال والجنوب من دائرة التماس أو دائرتى التقاطع يتغيير مقياس الرسم ويحدث التشوه بحيث يكون أكبر ما يمكن عند القطبين كما هو مبين فى شكل (١٠).

وفى حالة الأسقاط الأسطوانى الذى تكون فيه دائرة الأستواء هى دائرة التماس تظهر كلا من خطوط الطول والعرض فى الخريطة على شكل خطوط مستقيمة متعامدة على بعض (شكل ٩) وتكون خطوط الطول المتوازية



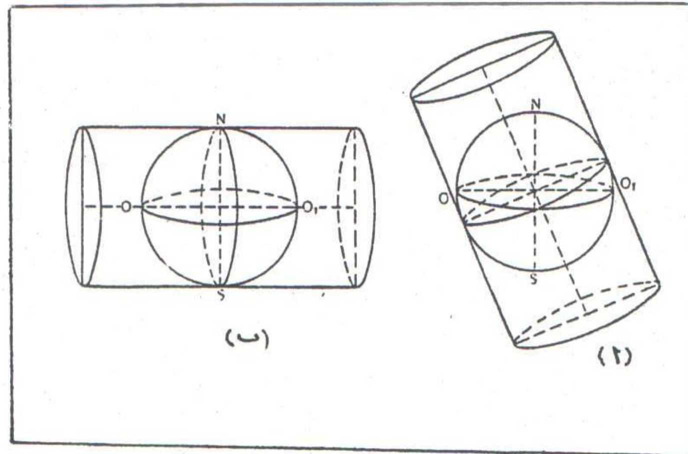
شكل (٩)



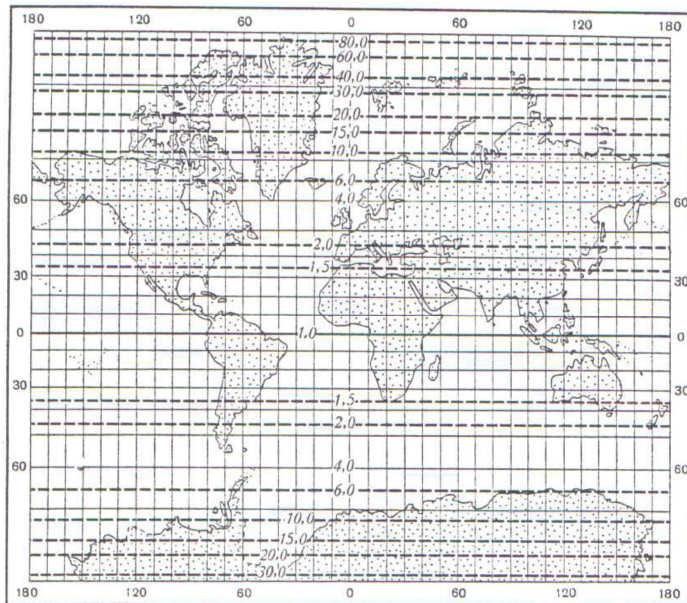
Patterns of deformation

شكل (١٠)

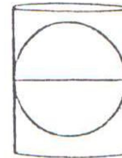
فيما بينهما على أبعاد متساوية من بعض وتناظر المسافة بين أى خطى طول على الأستواء. أما خطوط العرض المتوازية فيما بينهما فإن المسافات بينهما تزداد كلما بعدنا عن الأستواء إلى الشمال أو الجنوب. وقد تكون دائرة التماس فى هذا الأسقاط الأسطوانى هى أى دائرة عظمى واقعة على سطح الكرة (إذا ما اعتبرنا أن الكرة تمثل شكل الأرض) غير دائرة الأستواء أو دوائر خط الطول ، فيطلق على الأسقاط فى هذه الحالة الأسقاط الأسطوانى المائل كما هو موضح فى شكل (١١ - أ). أما إذا كانت دائرة التماس هى أحدى دوائر الطول فإن الأسقاط يطلق عليه اسم الأسقاط الأسطوانى المستعرض كما هو مبين فى كل (١١ - ب). ولقد استخدم الأسقاط الأسطوانى المستعرض لعمل خرائط جمهورية مصر العربية كما سنبين فيما بعد. وفى شكل (١٢) مبين خريطة لسطح الأرض معدة بالأسقاط الأسطوانى المماس أما فى شكل (١٣) فلقد وضحنا خريطة لسطح الأرض معده بالأسقاط الأسطوانى القاطع حيث دوائر العرض القاطعة هى خطى عرض ٤٠ ° شمالا وجنوبا.



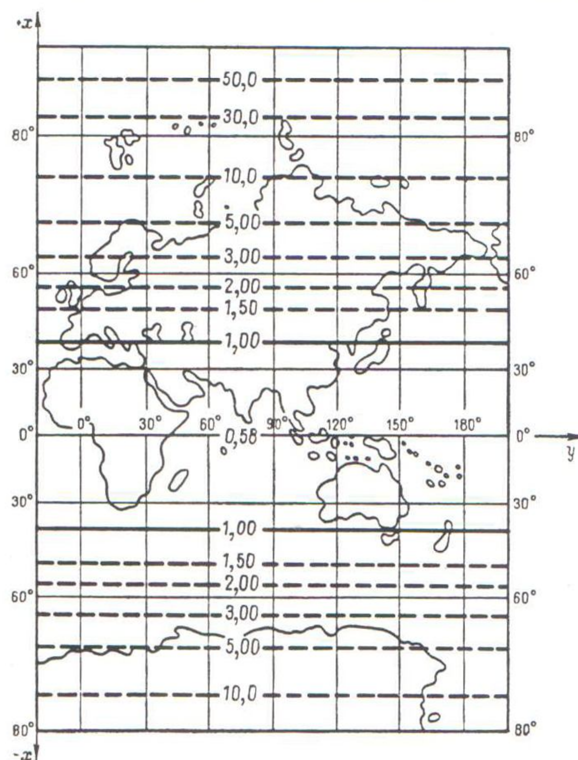
شكل (١١)



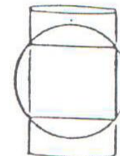
180 120 60 0 60 120 180
80,0
60,0
40,0
30,0
20,0
15,0
10,0
6,0
4,0
2,0
1,5
1,0
1,5
2,0
4,0
6,0
10,0
15,0
20,0
30,0
60 30 0 30 60



شكل (١٢)



x
50,0
30,0
10,0
5,00
3,00
2,00
1,50
1,00
0,58
1,00
1,50
2,00
3,00
5,00
10,0
80° 60° 30° 0° 30° 60° 80°
0° 30° 60° 90° 120° 150° 180°
y
-x

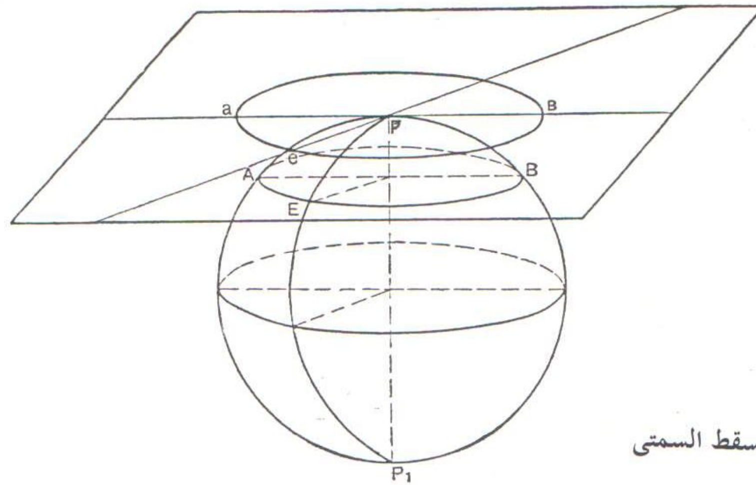


شكل (١٣)

المساقط السمتية Zenithal Projections:

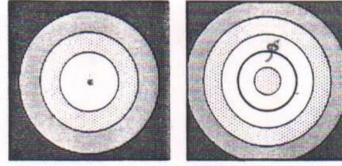
ينشأ المسقط السمتى عن طريق تثبيت الخريطة المنبسطة بحيث تمس الكرة الأرضية فى نقطة واحدة وينجم عن ذلك سطح مماس يمكن أن ينشأ عليه مسقط دائرى أو مسقط سمتى ، وهنا يحتفظ بالمقياس الحقيقى فى نقطة واحدة فقط هى المركز الهندسى للمسقط. وإذا ما كانت نقطة التماس هى أحد القطبين للكرة الأرضية فإن خطوط العرض تظهر فى المسقط على هيئة دوائر مركزها واحد هو نقطة التماس (القطب) ، فى حين تظهر خطوط الطول على شكل مستقيمات مارة بمركز الخريطة كما هو مبين فى شكل (١٤).

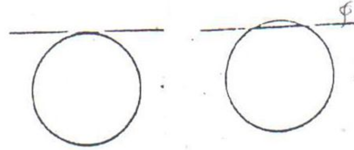
وفى شكل (١٥ - A) بين المناطق التى يتدرج فيها التشوه عندما يكون الأسقاط سمتى ومستوى المسقط يمس سطح الأرض. أما فى شكل (١٥ - B) فتظهر مناطق التشوه للمسقط السمتى الذى يقطع فيه مستوى المسقط سطح الأرض عند خط عرض ϕ. ولقد بينا فى شكل (١٦) خريطة لسطح الأرض معدة بالأسقاط السمتى القاطع حيث مستوى المسقط يقطع سطح الأرض عند خط عرض ٧٠ ° شمالا وعنده كان معامل مقياس الرسم يساوى واحد فى حين كان يزيد عن الواحد إذا ما اتجهنا إلى خط الأستواء ويقل عن الواحد عندما تقترب من القطب كما سنبين ذلك تفصيلا فيما بعد.



نشوء المسقط السمتى

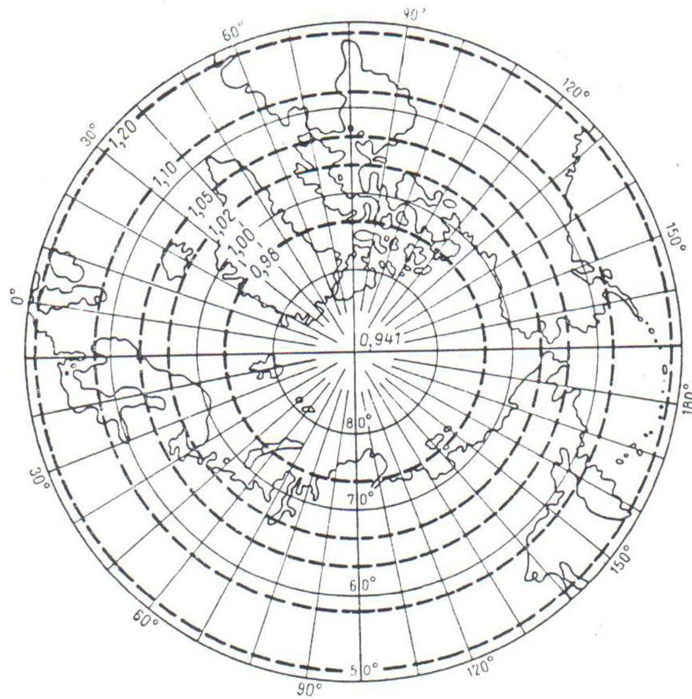
شكل (١٤)





Tanjent plane   Secant plane

شكل (١٥)



شكل (١٦)

تقسيم المساقط من حيث وضع سطح الأسقاط:

يمكن تقسيم كل نوع من الأنواع السابقة (أسطوانى - المخروطى - السمتى) تقسيما فرعيا من حيث وضع سطح الأسقاط بالنسبة للكرة الأرضية (أو الأسفرويد) وذلك على النحو التالى:

١ - أسقاط عادى Normal Projection

وفى هذا النوع تظهر خطوط الطول والعرض على هيئة منحنيات هندسية بسيطة (دوائر - خطوط مستقيمة ...الخ). وغالبا يوجد تماثل فى اتجاهين متعامدين: أى أنه يمكن رسم شبكة خطوط الطول والعرض Graticule لربع سطح الأرض وتكون الثلاثة أرباع الباقية للشبكة متماثلة معها حول محورى السينات والصادات.

وفى حالة الإسقاط الاسطوانى العادى تكون الاسطوانة مماسة للارض عند خط الاستواء ومحورها منطبقا على محور الارض. وفى حالة الاسقاط السمتى يكون مستوى الاسقاط مماسا للارض عند أحد القطبين أو قاطعا عند خط غير الاستواء. وفى حالة الإسقاط المخروطى يكون محور المخروط منطبقا على محور الأرض ومماسا أو قاطعا عند دائرة أو دائرتى عرض.

٢ - اسقاط مستعرض Transverse Projection

فى هذا النوع يدور سطح الإسقاط ٩٠ ° عند وضعه فى الحالة السابقة. فمثلا فى الإسقاط الأسطوانى تكون الأسطوانة مماسة للارض عند أحد خطوط الزوال. وهنا يكون هناك تماثل خطوط الطول والعرض The Graticule غالبا حول محور واحد.

٣ - اسقاط مائل Oblique Projection:

وفيه يكون محور سطح الاسقاط (الأسطوانة أو المخروط) أو مستوى الأسقاط (فى حالة المساقط السمتية) فى وضع عام بالنسبة لمحور دوران الأرض أو القطبين. ولا يظهر فيه تماثل على الأطلاق فى شكل شبكة خطوط

الطول والعرض. والمعالجة الرياضية لهذه المساقط تكون معقده ولا يلجأ لهذه الأنـواع مـن المسـاقط إلا عنـد وجود مبررات لذلك.

تقسيم المساقط تبعا للخصائص الهندسية التى يحققها المسقط:

يمكن تقسيم المساقط من حيث الخصائص Properties التى يحتفظ بهـا الاسـقاط فـى تمثيـل معـالم الأرض كالتالى:

١ - المساقط التشابهية Conformal Projection:

وتطلق عليها أحيانا الصفة Orthomorphic وتوجد أنـواع عديـدة مـن الاسـقاطات التشـابهية ، ولهـا خاصيـة الاحتفاظ بالزوايا حول كل نقطة فيها. ويكون مقياس الرسم فى جميع الاتجاهات عند النقطة الواحدة متسـاويا ولكن لا يكون مقياس الرسم متساويا فى جميع أجزاء الخريطة. ويحتفظ الاسقاط بالاشكال إذا كانت صغيرة. والمساقط التشابهية ملائمة للاستعمال فى المساحة نظرا لان خاصية حفظ الزوايا من الأهميـة بمكـان فـى هـذه الحالة ، لأن معظم الاعمال المسـاحية تحتـوى علـى أرصـاد زاويـة ، ومـن الضـرورى أن تسـاوى الزوايـا علـى الخريطة نظائرها المقاسة فى الطبيعة. وإسقاط نقط مثلثات الدرجة الأولى والثانية يمكن أن يتـم علـى أى نـوع من الخرائط لانها تحسب مباشرة على الاسفيرويد ، ولكن أهمية خاصية "التشابه Conformality" تظهر عنـد إسقاط شبكات الدرجات الاقـل حيـث نعتبر هـذه الشبكات مستوية ومتصلـة بالشبكة الرئيسـية ، وهنـا تكـون الحسابات معقدة إذا لم تكن الزوايا المقاسة حول نقطة على الإسقاط مساوية لنظائرهـا المقاسـة فـى الطبيعـة - كذلك الحال عند إسقاط نقط الترافرسات الموصلة بين نقط المثلثات. وتظهر أيضا ميزة الاسـقاط التشـابهى عند إجراء عمليات التحشية العمودية على الخريطة حيث تظل عمودية كما كانت فى الطبيعة.

ومن خصائص المساقط التشابهية أيضا أن شبكة خطوط الطول والعرض على الخريطة "Graticule" عبارة عن مجموعتين من المنحنيات المتعامدة Orthogonal - وقد تكون خطوط مستقيمة. وهذه نتيجة مباشـرة لان الاسقاط يحفظ الزوايا. ولكن يجدر أن نذكر هنا أن العكس غير صحيح:

فأى اسقاط تتقاطع فيه خطوط الطول والعرض فى زوايا قائمة ليس من الضرورى أن يكون إسقاطا تشابهيا.

٢ - المساقط متساوية المساحات (التكافؤية) Equal - Area Projections:

وهذا النوع من المساقط له خاصية حفظ المساحات - فبرغم وجود تغير فى مقياس الرسم فى أجزاء الخريطة المختلفة تكون المساحات على الخريطة مساوية لنظائرها على سطح الأرض.

وتستعمل هذه الأنواع من المساقط فى عمل خرائط التوزيعات الاحصائية مثل خرائط كثافة السكان أو توزيعات المحاصيل....الخ.

ويجب أن نذكر هنا انه لا يمكن أن يجمع أى إسقاط بين خاصيتى التشابه والتكافؤ.

٣ - المساقط متساوية المسافات Equidistant Projections:

فى هذا النوع من المساقط يكون مقياس الرسم حقيقيا فى اتجاه معين فى الخريطة باكملها. وعلى سبيل المثال قد يكون المقياس الزوالى ثابتا ومساويا لمقياس الرسم الأساسى (أنظر ص التشوه) وفى هذه الحالة تكون المسافات المقطوعة على أى خط زوال بين خطوط العرض المختلفة مساوية لاطوال الأقواس المناظرة على سطح الأرض بعد ضربها فى مقياس الرسم الأساسى للخريطة.

تقسيم المساقط تبعا لطريقة الأسقاط:

يمكن تقسيم المساقط حسب طريقة الاسقاط إلى نوعين:

١ - مساقط منظورية Perspective Projections

فى هذا النوع تنقل النقط من سطح الأرض إلى سطح الاسقاط باستعمال اسقاط هندسى منظورى Perspective ، بمعنى أنه يوجد مركز للاسقاط ونتخيل أشعة خارجة منه تقطع الأرض وسطح الاسقاط فى النقط المتناظرة.

٢ - مساقط غير منظورية أو مساقط رياضية Mathematical Projections

وفى هذا النوع لا يوجد مركز للاسقاط بالمعنى الهندسى - بل نسقط النقط باستعمال معادلات رياضية تستنتج بحيث تحتفظ الخريطة بخصائص معينة مرغوبة مثل حفظ الزوايا أو المسافات أو المساحات. وكما

علمنا فلا يمكن أن يوجد نوع من الأسقاط يحفظ هذه الخصائص مجتمعة وانما يمكن أن يحفظ خاصية واحدة أو أثنين فى بعض الأحيان.

اختيار المسقط

علاقة المسقط بالموقع :

باستعراض المساقط المتعددة التى تم شرحها ، نجد انها قسمت من حيث طريقة الانشاء الى مجموعات رئيسية هى : الاسطوانية والمخروطية والسمتية.

وفى الواقع يتفق هذا التقسيم مع الهيكل الجغرافى لخطوط الطول والعرض المرسومة على سطح الأرض.

١ - فعند تمثيل منطقة استوائية على خريطة يكون أحد المساقط الاسطوانية اختيارا ملائما ، اذا ينتقل الاستواء الى الخريطة مساويا لطوله الأصلى على الأرض ويكون شكله مستقيما. ومن ثم يصبح المسقط سهلا من حيث الحساب والرسم.

٢ - وعند تمثيل منطقة تقع بين الاستواء والقطب يكون أحد المساقط المخروطية ملائما ، إذ ينتقل خط العرض الرئيسى إلى الخريطة مطابقا لطوله الأصلى على الأرض ويكون على شكل قوس من دائرة. ومن تلك البداية يمكن اكمال المسقط بسهولة.

٣ - وعند تمثيل منطقة قطبية يكون أحد المساقط الاتجاهية ملائما ، اذ تنتقل جميع خطوط الطول المتلاقية عند القطب الأرضى محتفظة بنفس الزوايا الاصلية على سطح الارض. أى أن خطوط الطول ستظهر على المسقط فى صورة حزمه من المستقيمات المتلاقية فى نقطة وتكون الزوايا بينها مساوية للزوايا المتناظرة على سطح الأرض.

ومن ثم يمكن اكمال المسقط بالسهولة المعروفة فى حالات المساقط الاتجاهية القطبية.

٤ - وعند تمثيل العالم كله أو نصفه على خريطة يحسن الالتجاء إلى أحد المساقط المعدلة التى تعالج المنطقة ككل والتى تبدأ بتحديد شكل المحيط الخارجى للمسقط مرة على شكل دائرة ومرة على شكل قطع ناقص ، . ثم يستكمل الهيكل الجغرافى للخريطة داخل الاطار المحدد للمسقط.

ويلزم أيضا أن نعرف أنه عند أى مكان على سطح الأرض يمكن الاسقاط بأى طريقة من الطرق المعروفة ولكن الاسقاط مع مراعاة التقسيم السابق يجعل الحساب أسهل ما يمكن.

فمثلا عند مكان عرضه ٥٠ ° شمال يمكن استخدام الاسقاط المخروطى بحيث يمس المخروط سطح الارض حول دائرة العرض ٥٠ ° شمال.

ويمكن أيضا الاسقاط على مستوى يمس الأرض عند هذا المكان ويمكن الاسقاط على اسطوانة تمس الأرض حول خط الطول الذى يمر بهذا المكان أو أسطوانة تمس الأرض حول دائرة عظمى تمر بهذا المكان (وفى هاتين الحالتين الأخيرتين يسمى المسقطين الناتجين اسطوانى مستعرض ، واسطوانى منحرف).

ولكن الأسقاط المخروطى اسهلها كلها فى الحساب.

علاقة المسقط بالغرض المطلوب منه عمل الخريطة:

يتحكم الغرض المطلوب منه عمل الخريطة فى اختيار المسقط المطلوب. هناك اغراض متعددة لرسم الخرائط ولابد أن تراعى أن المسقط المختار للخريطة يحقق الخصائص الهندسية التى تفى بهذه الأغراض.

والخرائط الجغرافية المرسومة بمقاييس صغيرة تستخدم فى الأغراض الآتية:

١ - بيان التوزيعات.

٢ - بيان الاتجاهات المتساوية من مكان بعيد.

٣ - بيان المسافات المتساوية من مكان معين.

٤ - الملاحة باتباع خطوط السير الثابتة الاتجاه.

٥ - الملاحة باتباع أقصر المسافات.

٦ - بيان الشكل المجسم للأرض.

١ - ولرسم خريطة للتوزيعات يلزم أن يكون المسقط متساوى المساحات. والمساقط متساوية المساحات التى تم استعراضها هى المستوى والاسطوانى المتساوى المساحات والمسقط المخروطى المتساوى

المساحات ، وعلى ذلك يتم اختيار أحد هذه المساقط لخرائط التوزيعات مع مراعاة موقع المنطقة المطلوب بيانها كما سبق ، ومع مراعاة العلاقات التى ستذكر فيما بعد.

٢ - ولرسم خريطة تعطى الاتجاهات الحقيقية من مكان معين يلزم أن يكون المسقط الاتجاهى ومركزه عند هذا المكان. وهذا النوع من الخرائط يستخدم أيضا فى محطات الارسال اللاسلكى حتى تتعرف المحطة على الاتجاهات الحقيقية للأماكن التى يمكنها استقبال الأذاعة وبذلك تتمكن المحطة من توجيه الموجات الى تلك الاماكن.

٣ - ولرسم خريطة تعطى المسافات الحقيقية من مكان معين يلزم أن يكون المسقط اتجاهى متساوى المسافات.

وهذا النوع من المساقط يستخدم أيضا فى خرائط محطات الارسال اللاسلكى المشروحة فى البند السابق لتعطى المسافات الحقيقية بالاضافة إلى الاتجاهات الحقيقية من موقع المحطة - كما يستخدم أيضا هذا المسقط فى الخرائط التى تبين خطوط الملاحة الجوية من مركز رئيسى يكون عادة عاصمة لاحدى الدول.

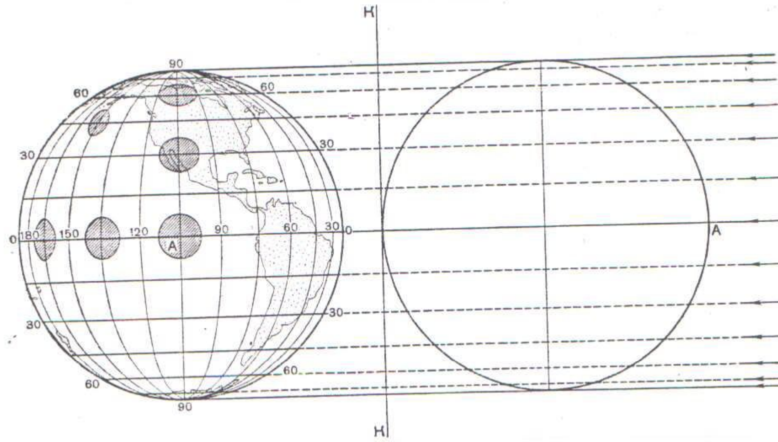
وفى هذا المجال لابد وأن نوضح أنه لا يوجد مسقط يحقق المسافات المتساوية فى جميع اتجاه الخريطة - كما وأن هناك مساقط تعطى المسافات المتساوية على خط من خطوط الطول أو العرض أو كليهما معا أو أكثر من ذلك فالمساقط الأسطوانية تحقق تساوى المسافات على خط الأستواء ، كما وأن المسقط الأسطوانى البسيط يحقق بالاضافة إلى ذلك تساوى المسافات على جميع خطوط الطول ، وذلك بالطبع يقابله تشويه فى خطوط العرض يتزايد كلما ابتعدنا عن الاستواء.

٤ - ولرسم خريطة تستخدم فى الملاحة باتباع خطوط السير الثابتة الاتجاه يلزم أن يكون المسقط تشابهى.

والمعروف أن التشوية يتزايد فى مسقط مركيتور كلما ابتعدنا عن الاستواء ولذلك لا يستخدم هذا المسقط لتمثيل المناطق القطبية ويستبدل بالمسقط الاستربوجرافى القطبى.

٥ - ولرسم خريطة تستخدم فى الملاحة باتباع أقصر الطرق يلزم أن يكون المسـقط مركـزى وهـو المسـقط الوحيد الذى فيه تمثل الخطوط المستقيمة على الخريطة الدوائر العظمى (أقصر المسـافات) على سـطح الأرض.

٦ - ولرسـم خريطـة تبيـن الشـكل المجسـم للكـرة الأرضيـة - تبرز تكورهـا - يلزم استخدام المسـقط الأورثوجرافى ، فهو مسقط منظور يقع مركز الاسقاط فيه عند اللانهاية لذلك يمثل هذا المسـقط شـكل الارض كما يراها الانسان من بعيد جدا عنها (شكل ١٧)



شكل (١٧)

وهذا المسقط يستخدم كثيرا فى خرائط الأطالس الحديثة التى تعنى بدراسة الأرض ككل ، كمـا يسـتخدم فى الكتب الجغرافية لتوضيـح الشـرح الخـاص بالمعـالم العامـة للكـرة الأرضيـة. أحيانـا يسـتعاض عـن المسـقط الأورثوجرافـى بالمسقط الأستريوجرافى وذلـك لصعوبـة اجـراء حسـابات الأورثوجرافـى ولسـهولة اجـراء حسـابات الاستريوجرافى وأيضا لصعوبة رسم القطاعات الناقصة فى الأورثوجرافى ولسهولة رسم أقواس الدوائر فى الاستريوجرافى. ويعطى الاستريوجرافى صـورة مجسـمة لشـكل الارض بدرجـة مقبولـة ولكنهـا ليسـت التجسيم الذى يعطية الأورثوجرافى.

٧ - بالاضافة إلى الاغراض السابقة تتضمن الاطالس عادة خرائط فلكية. والخرائط الفلكية ترسم عادة بالمسقط الاستريوجرافى حتى يمكن استخدامها فى قياس بعض العناصر كما انه يمكن متابعة حركة الاجرام السماوية عليها. وترسم الخرائط الفلكية أيضا على المسقط الاتجاهى متساوى المسافات القطبى وفى هذه الحالة ترسم الكرة السماوية فى مسقطين متجاورين أحدهما للنصف الشمالى والآخر للنصف الجنوبى.

وفى كثير من الأطالس الحديثة ظهرت خرائط القمر مرسومة بالمسقط الاستريوجرافى الاستوائى فى جزئين أحدهما للنصف المواجه للارض والجزء الاخر للنصف الثانى.

علاقة المسقط باتساع وشكل المنطقة المطلوب رسمها

أولا : من حيث الاتساع:

١ - عند رسم قارة مثل أفريقيا على المساقط المختلفة التى تصلح لذلك مثل مركيتور والاتجاهى متساوى المسافات والاتجاهى متساوى المساحات والاستريوجرافى والاورثوجرافى ونجد أن هناك فروقا فى الاشكال الناتجة. وتظهر تلك الفروق فى شكل الهيكل الجغرافى الذى فيه تكون خطوط الطول مستقيمة احيانا ومنحنية أحيانا وتكون خطوط الغرض مستقيمة أحيانا ومنحنية أحيانا كما تختلف درجة الانحناء من مسقط إلى آخر.

٢ - وإذا رسمنا قارة أفريقيا والبحار والمحيطات المحيطة بها - أى امتدت الخريطة غربا لتمثل المحيط الأطلسى حتى سواحل الامريكتين وامتدت شرقا لتشمل المحيط الهندى حتى سواحل الهند وجزر الهند الشرقية وسواحل استراليا وامتدت شمالا لتشمل البحر المتوسط واجزاء من أوروبا وامتدت جنوبا حتى سواحل القارة القطبية الجنوبية - على نفس المساقط التى تصلح لأفريقيا ، لوجدنا أن الفروق فى الاشكال قد زادت واتضحت ، وذلك يحدث لزيادة الانحناء فى خطوط الطول والعرض كلما ابتعدنا عن المركز نحو أطراف الخريطة.

٣ - وإذا رسمنا احدى دول افريقيا أو منطقة من هذه القارة على مساقط مختلفة فاننا نجد أن الفروق بين الاشكال الناتجة صغيرة لا تذكر ، وذلك لان الفرق بين الخط المستقيم والخط المنحنى الذى يناظره يكون صغيرا فى المناطق المحدودة الاتساع.

من هنا يتبين أن تحديد المسقط المطلوب لرسم منطقة صغيرة من العالم بمقياس صغير يتفق مع خرائط الاطلس ، لا يؤثر كثيرا على الشكل الناتج لأن معظم المساقط تؤدى إلى اشكال متقاربة.

وكلما زادت المنطقة فى الاتساع كلما اتضحت الحاجة الى تحديد خصائص المسقط المطلوب وبالتالى الى تحديد اسم المسقط.

ثانيا : من حيث الشكل :

١ - عند البحث عن مسقط يصلح لتمثيل الساحل الغربى لامريكا الجنوبية الذى يمتد من العرض ٨ ° شمال إلى العرض ٥٥ ° جنوب فى حين يبلغ اتساعه مع خطوط الطول ١٠ ° درجات تقريبا يحسن البحث عن مسقط يحقق المسافات المتساوية مع خط الطول المتوسط فى هذه المنطقة وهو خط الطول ٧٠ ° غرب. والمساقط التى تحقق ذلك هى الاسطوانى البسيط.

٢ - عند البحث عن مسقط يصلح لتمثيل المنطقة التى تشمل الحدود السياسية بين كندا والولايات المتحدة والتى تمتد من الطول ٦٧ ° غرب إلى الطول ١٢٣ ° غرب فى حين يبلغ اتساعها مع درجات العرض ٤ ° درجات تقريبا يحسن البحث عن مسقط يحقق المسافات المتساوية مع خط العرض المتوسط فى تلك المنطقة وهو خط العرض ٤٧ ° شمال ، ومعظم المساقط المخروطية تحقق هذا الغرض. من هنا يتضح أن شكل المنطقة المطلوب تمثيلها على الخريطة يتدخل فى تحديد المسقط المطلوب.

اختيار المسقط مع مراعاة شكل هيكله الجغرافى :

مما سبق يتضح أن اختيار المسقط يتم مع مراعاة الآتى :

١ - موقع المنطقة.

٢ - الغرض المطلوب منه عمل الخريطة.

٣ - اتساع المنطقة وشكلها.

وحتى مع مراعاة تلك الظروف فاننا نصل احيانا الى مسقطين أو ثلاثة أو أكثر تحقق المطلوب. وعندئذ تراعى ظروف جديدة وهى :

أولا : الحسابات والمعروف أن بعض المساقط لا تتطلب حسابات معقدة خصوصا تلك التى يدخل فى تكوينها الخطوط المستقيمة أو أقواس الدوائر وعادة يلجأ الكارتوجرافى الى المسقط الذى لا يحتاج إلى حسابات معقدة.

ثانيا : طريقة الرسم : وبالطبع يفضل الكارتوجرافى المسقط التى يدخل فى تكوينه الخطوط المستقيمة وأقواس الدوائر لسهولة رسمها.

ثالثا : بالاضافة إلى العنصرين الهامين السابقين لابد وأن نتذكر دائما أن الخريطة تمثل سطح الارض الكروى وأن خطوط الطول وخطوط العرض على سطح الأرض أقواس دوائر ولذلك كلما كانت خطوط الطول والعرض على الخريطة منحنية كلما كانت الخريطة أقرب شكلا من سطح الأرض. وليس معنى ذلك أن تستبعد المساقط التى يدخل فى تشكيل هيكلها الجغرافى الخطوط المستقيمة ، فأحيانا يلزم أن تكون الخريطة على مسقط مركيتور وأحيانا لابد وأن تكون الخريطة على مسقط مركزى وهذان المسقطان لا يخلوان من الخطوط المستقيمة.

ولكن لو كان الكارتوجرافى يصدد انشاء مجموعة من الخرائط كما فى حالة الأطلس فيستحسن أن ينوع من المساقط المستخدمة وهنا يلزم التنوية مرة أخرى إلى استخدام المسقط الاورثوجرافى فى خرائط الاطلس الذى يعطى جمالا وتجسيما للشكل الحقيقى للارض بالرغم من صعوبة حساباته ورسمه.

التمثيل الرياضى للأسقاط

لتمثيل نقطه واقعة على سطح الأرض الكروى أو الاسفرويدى زات احداثيات جغرافية (ϕ, λ) على مستوى فانه يلزم الحصول على علاقات رياضية تربط بين الاحداثيات الحقيقية (الجغرافية) للنقطة وبين احداثيات مسقطها فى المستوى. واحداثيات المسقط قد تكون احداثيات كرتيزيه (x,y) أو احداثيات قطبية (γ,ρ) كما هو مبين فى شكل (١٨) وعلم اسقاط الخرائط يهدف الى ايجاد العلاقات الرياضية التى تربط بين احداثيات النقطة على سطح الأرض المعبر عنها بالاحداثيات الجغرافية (ϕ, λ) والنقط الممثله لها على الخريطة المستوية المعبر عنها بالاحداثيات الكريتزية (x,y) او الاحداثيات القطبية (γ, ρ) وبمعنى أخر فانه المطلوب دائما تعريف الدوال f_4, f_3, f_2, f_1 فى العلاقات الرياضية التالية

عند استخدام الاحداثيات الكارتيزية

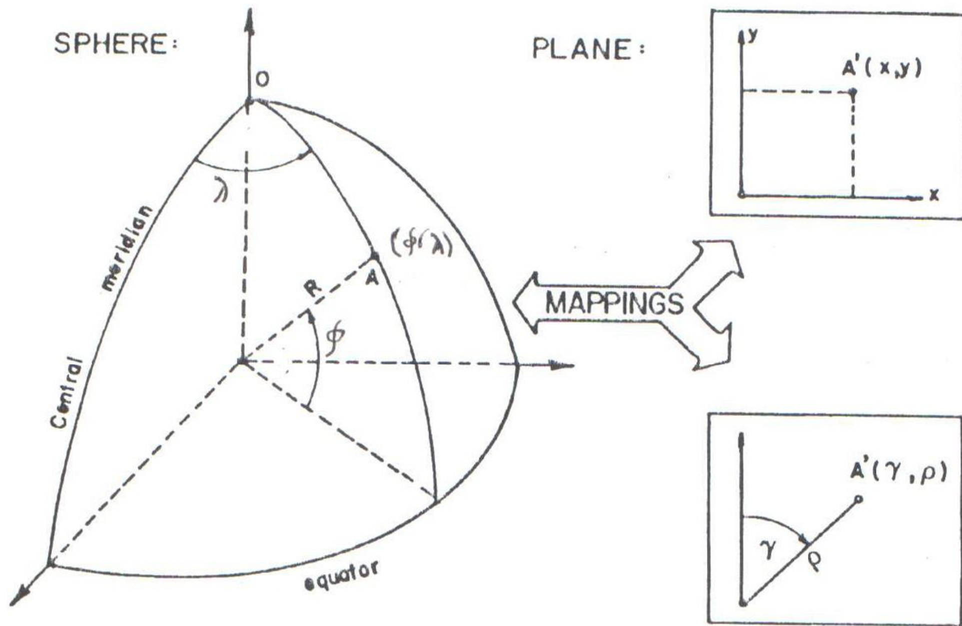
$$E = x = f_1(\phi, \lambda)$$

$$N = y = f_2(\phi, \lambda)$$

عند استخدام الاحداثيات القطبية

$$\gamma = f_3(\phi, \lambda)$$

$$\rho = f_4(\phi, \lambda)$$



Coordinate systems in geographic mappings

شكل (١٨)

وبتحديد هذه الدوال يتم رسم شبكه خطوط الطول والعرض **Graticule** على الخريطه ويمكن بعد ذلك توقيع أى نقط اخرى زات احداثيات (ϕ,λ) على الخريطة بطريقة الأستكمال من الداخل Interpolation بين اركان هذه الشبكه بالاضافه لمعرفه الخواص الأساسية لنوع الأسقاط المستخدم كأن تكون خطوط الطول عبارة عن خطوط مستقيمة فى الخريطة وخطوط العرض دوائر مثلا.

وعملية الحصول على الاحداثيات المستوية على الخريطة سواء الكرتيزية - او القطبية - من واقع الاحداثيات الجغرافية على الأرض يطلق عليها عملية التحويل من احداثيات جغرافية الى احداثيات مستوية (Transformation)

وفى بعض الأحيان تكون عملية التحويل عكسية بغرض الحصول على الاحداثيات الجغرافية الحقيقية لنقط معلومة فى الخريطة بأحداثياتها المستوية الكرتيزية او القطبية وفى هذه الحالة تكون معادلات التحويل العكسية على النحو التالى:

عند استخدام الاحداثيات الكارتيزية

$$\phi = f_1'(x,y)$$
$$\lambda = f_2'(x,y)$$

عند استخدام الاحداثيات القطبية

$$\phi = f_3'(\gamma,\rho)$$
$$\lambda = f_4'(\gamma,\rho)$$

نظرية التشوه فى اسقاط الخرائط

Theory of Distrotion in Map Projection

كما سبق أن قدمنا من المستحيل تمثيل سطح الأرض على سطح مستوى تمثيلا كاملا خاليا من التشوه- ويظهر التشوه على هيئة اختلاف فى مقياس الرسم عند النقط المختلفه فى الخريطه الواحدة - بل انه عند نفس النقطه يختلف مقياس الرسم في الاتجاهات المختلفة (ماعدا الاسقاطات التشابهية حيث يختلف مقياس الرسم من نقطه الى أخرى ولكن عند النقطه الواحدة يتساوى فى جميع الاتجاهات).
ودراسة اختلاف مقياس الرسم من نقطه الى أخرى ومن اتجاه الى آخر يؤدى الى معرفه تامه بخصائص الاسقاط من ناحيه التشوه.
وفى أى خريطة توجد نقط أو خطوط معينة لايحدث عندها تشوة وتسمى النقط أو الخطوط ذات التشوه الصغرى.Point or lines of zero distortion

(راجع الاشكال ٨،١٠، ١٥ التى تبين مناطق انعدام التشوه والمناطق التى يظهر فيها التشوه ويزداد من منطقة الى أخرى وذلك فى المساقط المخروطيه والأسطوانية والسمتية) ومقياس الرسم عند نقط التشوه الصغرى أو عند خطوط التشوه الصغرى يطلق عليها المقياس الاساسى للخريطة(μ_o) (principal scale) ويظهر التشوه فى صورة تغيير فى مقياس الرسم بقيم اكبر او اصغر من مقياس الرسم الاساسى كلما بعدنا عن نقط او خطوط التشوه الصغرى واتجهنا الى اطراف الخريطه حسب نوع المسقط المستخدم كما سنبين فيما بعد.وعموما فإنه يمكن تعريف مقياس الرسم الخاص بأى نقطة على الخريطة فى اتجاه معين (Particular Scale) بانه النسبه بين مسافه متناهية فى الصغر مقاسة على الخريطه فى هذا الاتجاه المعين وبعد المسافه المناظره لها على سطح الارض، ويطلق على مقياس الرسم لأى نقط(μ).والنسبة بين مقياس رسم النقطه ومقياس الرسم الاساسى للخريطة يطلق عليها معامل مقياس الرسم عند هذه النقطه (Scale factor) اى ان:

$$\text{معامل مقياس الرسم عند نقطة} = \frac{\text{مقياس رسم النقطة}}{\text{مقياس الرسم الأساسى}} = \frac{\mu}{\mu_o} \qquad (1)$$

وبذا يكون الفرق بين هذه النسبه وبين الواحد الصحيح ممثلا لأختلاف مقياس الرسم .وكما سبق ان ذكرنا فإنه عند النقطه الواحده يكون هناك العديد من مقياس الرسم فى الاتجاهات المختلفة (عدا فى المساقط التشابهية حيث يكون مقياس الرسم واحد فى النقطه الواحده) ، الا انه يهمنا فى دراسة التشوه الحصول دائما على اربعه مقاييس رسم اساسية عند النقطه الواحدة وتحديدا:
١- مقياس الرسم (h) فى اتجاه الزوال للنقطه (فى اتجاه خط الطول لها)
٢- مقياس الرسم (k) فى اتجاه دائرة خط عرض النقطه
٣- مقياس الرسم (a) وهو اكبر مقياس رسم عند النقطه فى اتجاه يتم تحديده
٤- مقياس الرسم (b) وهو اصغر مقياس رسم عند النقطه وفى الاتجاه العمودى على اتجاه اكبر مقياس.

ولتعيين قيم مقاييس الرسم هذه فى الا سقاط عند اى نقطة فإنه يجب أولا تعين معادلات التحويل لهذا الاسقاط من الأحداثيات الجغرافية الى الاحداثيات المستوية ، ومن ثم يتم حساب معاملات خاصة يطلق عليها معاملات تيسوت (Tissot) والتى بدورها تستخدم فى حساب مقاييس الرسم المطلوبه.

فإذا كانت معادلات التحويل على الصوره

$$x = f_1(\phi, \lambda) \qquad y = f_2(\phi, \lambda) \qquad \text{.................. (2)}$$

فإن معاملات تيسوت (E,F,G) يمكن حسابها كالتالى:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2$$

$$F = \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) \qquad \text{.................. (3)}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2$$

ومقاييس الرسم فى اتجاه الزوال عند النقطه (h) وفى اتجاه خط العرض عند النقطه(k) تحسب من المعادلات الأتية:

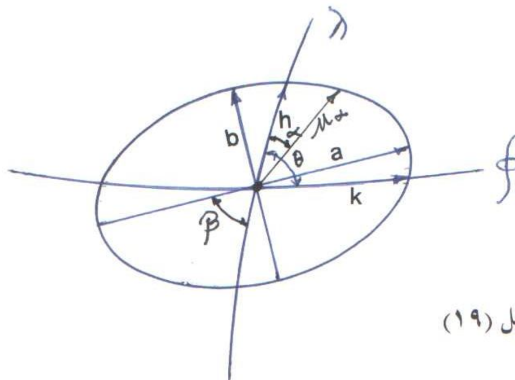
مقياس الرسم فى اتجاه الزوال (h) مساويا:

$$h = \frac{\sqrt{E}}{R} \qquad \text{.................. (4)}$$

مقياس الرسم فى اتجاه خط العرض (k) مساويا:

$$k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \phi} \qquad \text{.................. (5)}$$

حيث R نصف قطر الكرة الأرضية المتوسط



شكل (١٩)

اما مقياس الرسم عند نقطة (μ_α) فى اتجاه يصنع مع زوال النقطة زاوية قدرها (α) فإنه يتم حسابه من المعادلة الآتية :

$$\mu_\alpha = \sqrt{E.\cos^2\alpha + F.\sin 2\alpha.\frac{1}{\cos\phi} + G.\sin\alpha^2.\frac{1}{\cos^2\phi}} \quad \text{.........} \quad (6)$$

وواضح تماما انه بهذه المعادلة العامة (٦) يمكن تعيين أى مقياس رسم عند نقطة فى أى اتجاه يصنع (α) مع زوال النقطة. فإذا عوضنا فى هذه المعادلة بمقدار صفر = α نحصل على المعادلة (٤) الخاصة بتعيين مقياس الرسم فى اتجاه الزوال ، وإذا عوضنا بقيمة (α = ٩٠°) نحصل على المعادلة (٥) الخاصة بتعيين مقياس الرسم فى اتجاه خط عرض النقطة المتعامد مع الزوال.

وفى الواقع يمكن الحصول على مقدار θ' - المحصورة بين أى خط زوال مرسوم فى المسقط عند نقطة ما وخط العرض الممثل عند هذه النقطة - وذلك بالاستعانة بمعاملات تيسوت وعلى النحو التالى:

$$\theta' = COS^{-1}\frac{F}{h.k.\cos\phi} = \cos^{-1}\frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \text{..................} \quad (7)$$

وإذا حسبنا عند النقطة الواحدة العديد من مقاييس الرسم فى اتجاهات مختلفة تصنع زاويا α مع الزوال وتم تمثيل هذه المقاييس بمتجهات تمر بهذه النقطة وتصنع نفس الزوايا α مع الزوال فإننا نجد أن نهايات هذه المتجهات تقع على محيط قطع ناقص مركزه هو النقطة ونصف قطره الأكبر هو أكبر قياس رسم (a) ونصف قطره الأصغر هو أصغر مقياس رسم (b) ويطلق على هذا القطع الناقص (**قطع ناقص التشوه Ellipse of Distortion**) شكل (١٩) ويمكن التعبير عن قطع ناقص التشوه بانه مسقط دائرة متناهية فى الصغر واقعة على سطح الأرض عند نقطة معينة. فإذا ما كان نصف قطر هذه الدائرة مساويا الوحدة فإن انصاف اقطار القطع الناقص الممثل لهذه الدائرة فى المسقط - تمثل مقاييس الرسم الخاصة عند النقطة فى الاتجاهات المناظرة. ومقادير أكبر مقياس رسم (a) واصغر مقياس رسم (b) يتم حسابها من المعادلات:

$$a = \frac{1}{2}(A+B)$$

$$b = \frac{1}{2}(A-B) \quad \text{..................} \quad (8)$$

حيث :

$$A^2 = h^2 + k^2 + 2\ h.k.\ \sin\theta'$$

$$B^2 = h^2 + k^2 - 2\ h.k.\ \sin\theta' \quad \text{.................. (9)}$$

وإذا رسمت مجموعة من منحنيات الأخطاء لنقط موزعة على الخريطة فى اسقاط معين فإنها تعطى فكـرة وافيـة عن خصائص هذا الاسقاط فى مناطقه المختلفة. فمثلا إذا ظهر المنحنى عند نقطة معينة على شكل دائرة نصـف قطرها الوحدة فإن مقياس الرسم حقيقى عند هـذه النقطـة فـى جميـع الاتجاهـات (أى يسـاوى مقيـاس الرسـم الاساسى) ولا يوجد تشوه عند هذه النقطة.

وعلى سبيل المثال حسبت منحنيات الأخطاء فى اسقاط ميركيتور عند خـط الأسـتواء وخطـوط عـرض ٣٠ °، ٦٠ °، ٨٠ ° شمالا وجنوبا فكانت كلها دوائر أى أن : ($a = b$). والدائرة عند خط الأستواء نصف قطرهـا الوحدة أى أن جميع النقط الواقعة على خط الأستواء مقياس الرسم لها فى جميع الاتجاهـات حقيقـى ويسـاوى مقياس الرسم الأساسى للخريطة نظرا لأن خط الأستواء فى هذه الحالة هو خط التشوه الصغرى لهـذا المسـقط. ولقـد بينـت الدوائر الممثلة لمقياس الرسم عند خطوط العرض المختلفـة فـى اسـقاط مركيتـور التشـابهى فـى شـكل (٢). وبـالرجوع أيضا إلـى نفـس الشـكل (٢) بالنسبة لمسقطى ميركـاتور المتسـاوى المســافات أو المتساوى المساحات نجد أن قطع ناقص التشوه يؤول إلى دائرة فقط عند خط الأسـتواء باعتبـاره خـط التشـوه الصغرى فى المسقطين فى حين ظهر منحنى التشوه على شكل قطع نـاقص عنـد النقـط شـمال أو جنـوب خـط الأستواء واتجاه اكبر مقياس رسم هو نفسه اتجاه خطوط العرض وأصغر مقياس رسم هو اتجـاه خطـوط الطـول وأن منحنى الخطأ يكبر كلما اتجهنا إلى القطبين.

والزاوية المحصورة بين اتجاه الشمال فى الخريطة واتجاه أكبر مقياس رسم يطلق عليها (β) حيث

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{a^2 - b^2}} \quad \text{.................. (10)}$$

التشوه الزاوى Angular Dustortion :

إذا اختلف مقياس الرسم فى الاتجاهات المختلفة فى النقطة الواحدة ينجم عن ذلك أن يحدث تشوه فى الزوايا المحصورة بين هذه الاتجاهات عند هذه النقطة. ويهمنا حساب أقصى تشوه زاوى يمكن حدوثه عند نقطة أى أقصى فرق زاوى يحدث بين مقدار الزاوية على مستوى الأسقاط وقيمتها الحقيقية على سطح الأرض. وقيمة أقصى تشوه زاوى (W_o) يتم حسابه من المعادلة الآتية :-

$$W_o = \sin^{-1} \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \qquad \text{.................................} \quad (11)$$

والأتجاه الذى يظهر فيه أكبر تشوى زاوى هو ذلك الأتجاه الذى تحدده الزاوية (δ_o) عن اتجاه الـزوال ويتـم حسابه من المعادلة:

$$\delta_o = \tan^{-1} \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} \qquad \text{.................................} \quad (12)$$

ويمكن بمعرفة أكبر مقياس رسم (a) وأصغر رسم (b) الحصول على مقدار مقياس الرسم (μ_α) عنـد نقطة فى اتجاه ينحرف عن الزوال بالزاوية (α) وذلك من المعادلة الآتية :

$$\mu_\alpha = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha} \qquad \text{.................................} \quad (13)$$

التشوه فى المساحات Distortion in the Area:

يمكــن تعريف مقياس المساحة (p) عند أى نقطة بان النسبة بين مساحة جزئية صغيرة على مستوى المسقط (d P) والمساحة الحقيقية المناظره لها على سطح الأرض (d p). أى أن :

$$p = \frac{dP}{dp} \qquad \text{.................................} \quad (14)$$

فإذا ما تم حساب المعامل (H) من واقع معادلة التحويل للمسقط ، حيث :

$$H = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \phi}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) \qquad \text{.................................} \quad (15)$$

فإن قيمة مقياس المساحة (p) يتم حسابه من المعادلة التالية:

$$p = \frac{H}{R^2 \cos \phi} \quad \text{..........} \quad (16)$$

حيث (R) عباره عن نصف القطر المتوسط للأرض .

ولما كان المقدار H يساوى

$$H = \sqrt{E.G.} \sin\theta$$

وكذلك

$$\sqrt{E.G.} = h.k. R^2 \cos \phi$$

فإن مقياس المساحة يمكن تحديده بمعرفة مقياس الرسم فى اتجاه خط الطول واتجاه خط العرض كما يلى :

$$p = h.k. \sin \theta' \quad \text{..........} \quad (17)$$

وإذا ما تم معرفة أكبر مقياس رسم عند النقطة وأصغر مقياس رسم فإن مقياس المساحة عند هـذه النقطـة يكـون مساويا:

$$p = a.b \quad \text{..........} \quad (18)$$

ومن الواضح من المعادلة (١٨) أن مقياس المساحة يساوى مساحة المستطيل الـذى يغلـف القطـع النـاقص لأن هذا المستطيل يناظر المربع المغلق للدائرة الصغيرة المناظرة على سطح الأرض والذى مساحته تساوى الوحدة.

وفى المساقط متساوية المساحات (Equiareal) والتى نطلق عليها المســاقط التكافؤيـة يكـون قيـاس المسـاحة مساويا للوحدة أى أن النسبة بين المساحة على الخريطة إلى المساحة الحقيقية على سطح الأرض تكون مساوية الوحدة وعلى ذلك:

$$\boxed{p = a.b = 1.0} \quad \text{..........................} \quad (19)$$

مثال (١) :

إذا كانت معادلات التحويل لأحد المساقط على النحو التالى :

$$x = R.\lambda \qquad\qquad y = R \cdot \sin \phi$$

حيث R نصف القطر المتوسط للكرة الأرضية - $(\phi . \lambda)$ الأحداثيات الجغرافية لأى نقطة والمطلوب حسـاب معادلات أكبر مقياس رسم وأصغر مقياس رسم ومقياس المساحة عند نقطة ومن ثم حساب هـذه القيـم للنقطـة التى احداثياتها ٦٠ ° شمالا ، ٣٠ ° شرقا.يبين أيضا أكبر تشوه زاوى عند هذه النقطة.

الحل :

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = R$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = R.\cos\phi, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = 0$$

$$\therefore E = R^2 \cos^2\phi, \qquad F = 0 \qquad \& G = R^2$$

وبذا تكون مقاييس الرسم فى اتجاه خطوط الطول والعرض مساوية:

$$h = \frac{\sqrt{E}}{R} = \cos\phi \qquad\qquad k = \frac{\sqrt{G}}{R.\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\phi}$$

أما الزاوية بين خط الطول والعرض عند النقطة فى المسقط فتكون مساوية :

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

أى أن خطوط الطول والعرض فى المسقط متعامدة على بعض.

وعند النقطة التى احداثياتها (٦٠ ° شمالا ، ٣٠ ° شرقا) تكون قيم K , h مساوية

$$h = \cos 60° = 0.5 \qquad k = \frac{1}{\cos 60°} = 2.00$$

$$A^2 = h^2 + k^2 + 2.h\ k.\ \sin\theta = (0.5)^2 + (2.0)^2 + 0.5 \times 2.0 \times 1$$

$$A^2 = 5.25$$

$$\therefore\ A = 2.291$$

$$B^2 = h_2 + k_2 - 2\ h.k.\ \sin\theta = 3.25$$

$$\therefore\ B = 1.803$$

فيكون اكبر واصغرمقياس رسم مساويا

$$a = \frac{1}{2}\ (A+B) = 2.047 \qquad b = \frac{1}{2}\ (A\text{-}B) = 0.604$$

مقياس المساحة عند النقطة p حيث :

$$p = a.b = 2.047 \times 0.607 = 1.243$$

وبالنسبة لأكبر تشوه زاوى فأنه يساوى (W_o) حيث :

$$w_o = \sin^{-1} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)$$

وعند النقطة المطلوبة يكون W_o مساوية :

$$w_o = \sin^{-1} \left(\frac{2.047 - 0.607}{2.047 + 0.607}\right) = 32°\ 51'\ 33.3''$$

ويكون هذا التشوه الزاوى فى الاتجاه الذى يصنع زاوية δ_o مع الزوال حيث :

$$\delta_o \tan^{-1} \sqrt{(\frac{a}{b})} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2.047}{0.607}}$$

$$= 61° \ 25' \ 46.66''$$

مثال (٢):

احسب مقياس الرسم فى اتجاه الزوال وفى اتجاه خط العرض وكذلك أكبر وأصغر مقياس رسم فى خريطة معدة باسقاط معادلات التحويل له هى :

$$x = R. \ f.\sin\lambda \qquad\qquad y = K - R. \ f.\cos\lambda$$

حيث K مقدار ثابت موجب.

عين قيم هذه المقاييس عند النقطة التى احداثياتها الجغرافية (٤٢ ° شمالا ، ١٦ ° شرقا) وكذلك قيمة مقياس الرسم فى اتجاه يصنع ٢٨ ° مع الزوال عند هذه النقطة – أحسب أيضا مقياس المساحة ومقدار أكبر تشويه زاوى عند هذه النقطة واتجاه هذا الشتويه

الحل :

$$\frac{\partial x}{\partial f} = R.\sin\lambda, \frac{\partial x}{\partial \lambda} = R.f.\cos\lambda$$

$$\frac{\partial y}{\partial f} = -R.\cos\lambda, \frac{\partial y}{\partial \lambda} = R.f.\sin\lambda$$

وبذا تكون معاملات تيسوث مساوية:

$$E = R^2 \ (\sin^2 \lambda) + \cos^2 \lambda) = R^2$$

$$F = R^2. \ f \ . \sin \lambda.\cos\lambda - R^2. \ f \ . \sin \lambda.\cos\lambda = 0$$

$$G = R^2. \ f^2 \ (\cos^2\lambda + \sin^2 \ \lambda \ ) \ = R^2 . f^2$$

وتكون قيم مقاييس الرسم فى اتجاه الزوال واتجاه خط العرض هى :

$$h = \frac{\sqrt{E}}{R} = 1.00 \qquad k = \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi} = \frac{f}{\cos f}$$

والزاوية بين خطى الطول والعرض فى الخريطة مساوية:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

وعند النقطة التى احداثياتها (٤٢ ° شمالا ، ١٦ ° شرقا) تكون هذه القيم مساوية:

$$h = 1.00 \qquad k = 0.9864$$

ولحساب أكبر وأصغر مقياس رسم ومقياس رسم المساحة والتشوية الزاوى فإن:

$$A^2 = h^2 + k^2 + 2.h\,k.\sin\theta = 3.9458$$

$$B^2 = h^2 + k^2 - 2.h\,k.\sin\theta = 0.00014$$

وعلى ذلك يكون :

$$A = 1.9864 \quad , B = 0.0118$$

$$a \simeq 1.000 \qquad b = 0.9873 \approx k$$

أى أنه فى هذا النوع من الأسقاط يكون أكبر مقياس رسم هو مقياس الرسم فى اتجاه الزوال ومقداره ثابت ويساوى الوحدة. وأصغر مقياس رسم فى اتجاه خطوط العرض.

وعلى ذلك يكون مقياس المساحة :

$$p = a.b = 0.9873$$

وأكبر تشوه زاوى مقداره

$$w_o = \sin^{-1}\left(\frac{1.000 - 0.9873}{1.9873}\right) = 0° \quad 21' \quad 58''$$

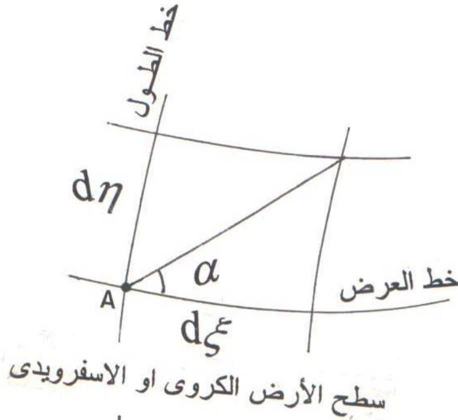
وفى الاتجاه :

$$\delta_o = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1.00}{0.9873}} = 45° \; 10' \; 59''$$

خاصية التشابة فى اسقاط الخرائط

Conformalety or Orthomorphism

يكون الأسقاط الناتج تشابهى اذا ما كان يحفظ الزوايا ويحدث هذا اذا كان مقياس الرسم للخريطة الناتجة عند النقطة الواحده يكون متساويا فى جميع الاتجاهات عند هذه النقطة.
ولأثبات ذلك نفرض انه عند نقطة على سطح الأرض الكروى او الاسفرويدى كانت هناك مسافتان صغيرتان مقاستان فى اتجاه خط عرض النقطة وخط طول النقطة. فإذا رمزنا لطول هاتين المسافتين بالكميات ($d\xi$) فى اتجاه خط العرض ، $d\eta$ فى اتجاه خط الطول. وكانت الكميتان المتناظرتان معهم على الخريطة عند مسقط النقطة هى dx ، dy فى اتجاه مسقط خط العرض ومسقط خط الطول فإن مقياس الرسم عند هذه النقطة فى اتجاه خط العرض سيكون مساويا $\frac{dx}{d\xi}$ ، وكذلك يكون مقياس الرسم فى اتجاه خط الطول مساويا $\frac{dy}{d\eta}$. فإذا ساوينا مقياس الرسم فى اتجاه خط العرض مع مقياس الرسم فى اتجاه خط الطول عند هذه النقطه ينتج ان:



سطح الأرض الكروى او الاسفرويدى

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta}$$

وعليه:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\xi}{d\eta}$$

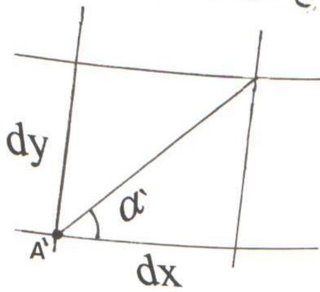
ولكن:

$$\cot \alpha' = \frac{dx}{dy}$$

$$\cot \alpha = \frac{d\xi}{d\eta}$$

ينتج :

$$\alpha = \alpha'$$



الخريطة الناتجة

لذلك فإنه اذا كان الاسقاط تشابهى Conformal فإن اى زاوية عند نقطة ما على سطح الأرض تتساوى مع نظيرتها على الخريطة المسقط عند مسقط النقطة. وعلى ذلك فإنه عند النقطة الواحده تكون

$$h = k = a = b$$

ويكون قطع ناقص التشوه على شكل دائرة عند هذه النقطه

العلاقة بين شبكة الاحداثيات الكرتيزية

وشبكة خطوط الطول والعرض

Grid and Geographical Graticule

عند اتمام رسم الخريطة الموضحة لمسقط ما فإننا نقوم بأنشاء شبكة للتوقيع عليها مكونـة مـن مجموعتيـن مـن الخطوط المتوازية متعامدة على بعضها - المجموعة الأولى تكون أفقية وتمثل الاتجـاه السـنى (الشـرقى E) والأخـرى فـى الاتجـاه الرأسـى وتمثـل الأتجـاه الصـاوى y (الشـمالى N) ويكـون لهـذه الشـبكة نقطـة أصـل للاحداثيات تندرج منها إلى الشمال والجنوب وإلى الشرق والغرب كما هو مبين فى شكل (٢٠) وبالطبع توقع هذه الشبكة على اللوحة المستخدمة بأستعمال مقياس الرسم الأساسى المطلوب وبمعرفة علاقـات التحويـل مـن الاحداثيات الجغرافية إلى الاحداثيات الكرتيزية

$$E = x = f_1 \quad (\phi, \lambda)$$

$$N = y = f_2 \quad (\phi, \lambda)$$

ويتم حساب الاحداثيات الكرتيزية لنقط تقاطع خطوط الطول والعرض فى المنطقة المطلوب رسم الخريطة لهـا ، ثم يتم توقيع هذه النقط على شبكة الأحداثيات الكرتيزية التى تم رسمها ، ثم نقـوم بتوصيـل النقـط الواقعـة علـى خطوط العرض الواحدة وخطوط الطـول الواحـدة للحصـول على شبكـة خطـوط الطـول والعـرض الموقعـة علـى الخريطة. وقد تظهر خطوط الطول والعرض على شكل خطـوط مستقيمة أو منحنيـات حسـب نـوع وخـواص المسقط الذى نحن بصدده. فعلى سبيل المثال كانت خطوط الطول للمسقط الموقع فى شـكل (٢٠) خطـوط مستقيمة وخطوط العرض منحنيات وكان لهذا المسقط خط طول أوسط هو خط طول ٢٠ ° غربـا وتقـع علـى المحور الرأسى لشبكة الأحداثيات الكرتيزية.

ومن شكل (٢٠) يجب ملاحظة ثم مراعاة الآتى دائما:

١ - هناك اتجاه شمال فى اللوحة يطلق عليه اتجاه شمال شبكة التوقيع Grid North .

شكل (٢٠)

شكل (٢١)

٢ - اتجاه الشمال الحقيقى (الجغرافى) هو ما تحدده خطوط الطول الموقعة على اللوحة وقد يكون اتجاه الشمال الحقيقى غير مطابق لأتجاه شمال شبكة التوقيع كما فى شكل (٢٠) وكما فى شكل (٢١) . وقد تكون اتجاهات خطوط الطول متوازية فيما بينها وتوازى اتجاه شمال شبكة التوقيع وبذا يكون اتجاه الشمال الحقيقى مطابق لأتجاه شمال شبكة التوقيع كما فى حالة الخرائط المعدة بأسقاط ميركاتور.

٣ - نقطة مثل (A) على الخريطة تمثل نقطة احداثياتها الجغرافية $(\phi = 57^0 N, \lambda = 0)$ فى حين احداثياتها فى الخريطة هى (E = + 20 , N = + 13) . والنقطة B احداثياتها الجغرافية $(\phi = 57^0 N, \lambda = 10w)$ واحداثياتها فى الخريطة (E = + 10 , N = + 10)

٤ - الأنحرف المقاس فى الخريطة Grid Bearing عند نقطة B لنقطة A (انحراف الخط BA) هو الزاوية (α) المقاسة فى اتجاه عقرب الساعة من اتجاه الشمال بالخريطة حتى الوتر BA، وبالمثل انحراف الخط AB المقاس عند نقطة A لنقطة B هو الزاوية (α') المقاسة فى اتجاه عقرب الساعة من شمال الخريطة حتى الخط (الوتر AB).

٥ - فى المثلث القائم الزاوية ABC يكون الطول $\delta N = N_A - N_B = AC$

والطول $\delta E = E_A - E_B = BC$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\delta E}{\delta N} = \tan \alpha'$$

$$\delta N = AB \cos \alpha$$

$$\delta E = AB \sin \alpha$$

حيث AB طول الوترين بين النقطتين A ، B

٦ - الأنحراف الحقيقى الجغرافى للخط AB يقاس بدءا من الشمال الحقيقى (أى من خط الزوال المار بنقطة بداية الخط) ويطلق عليه الانحراف الزوالى Azimuth ومقداره يساوى الزاوية المحصورة بين خط الطول (الزوال) المار بنقطة وبين الخط الجيوديسى الذى يصل بين النقطتين المعينتين للخط. ففى شكل (٢٢) - والذى يمثل نفس النقطتين A ، B فى شكل (٢٠) ولكن بمقياس أكبر - الأنحراف

الزوالى عند النقطة B للخط BA هو الزاوية بين خط الطول BP والخط الجيوديسى BDA ويلاحظ أن مقداره أكبر من الأنحراف α . وبالمثل الأنحراف الزوالى عند نقطة A للخط AB هو الزاوية بين اتجاه خط الطول AP والخط الجيوديسى ADB.

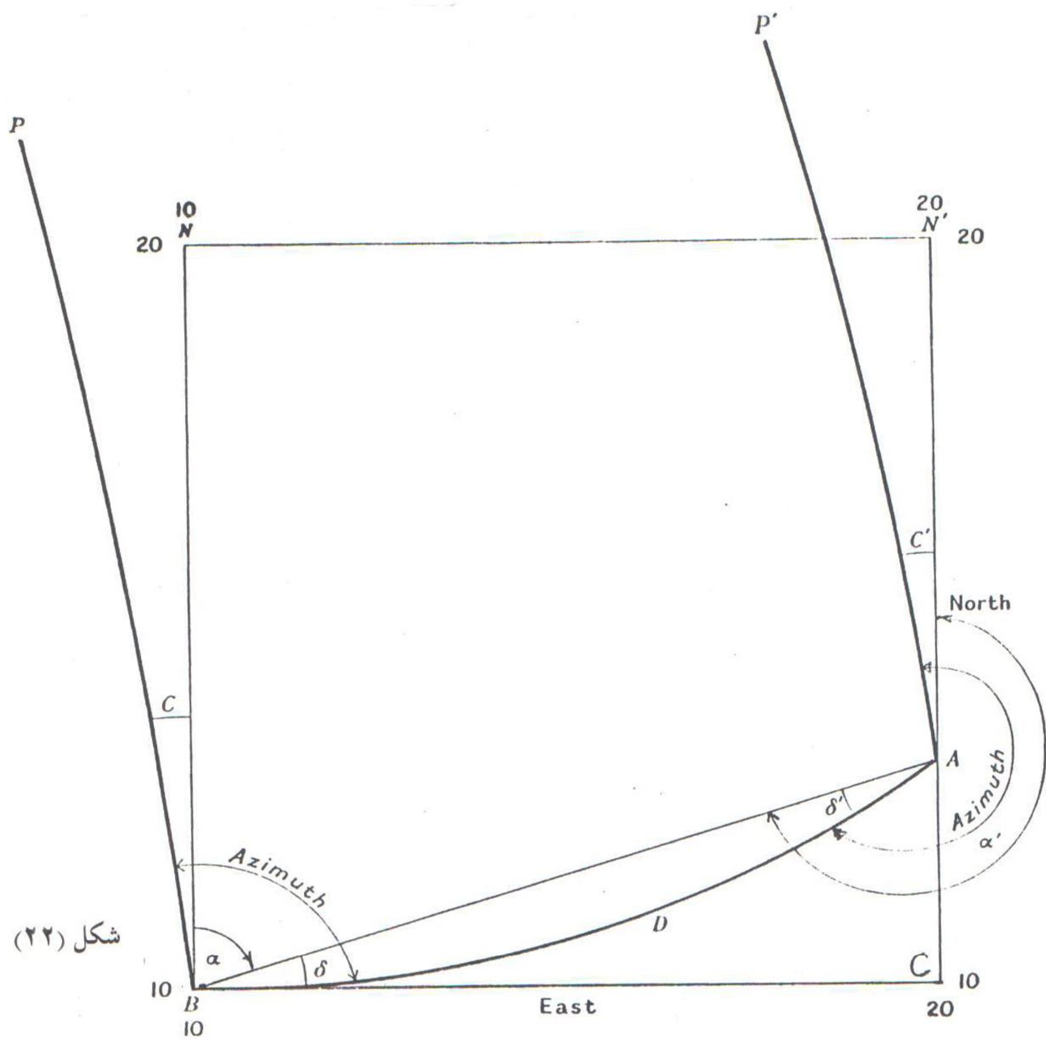
٧ - يلاحظ من شكلى (٢٠) ، (٢٢) أن هناك فرق زاوى بين اتجاه الشمال الحقيقى (اتجاه خط الطول) وبين اتجاه الشمال للخريطة ومقدار هذا الفرق الزاوى يختلف من نقطة إلى نقطة ويطلق عليه اسم زاوية التقارب Convergence ويرمز لها بالرمز (C). والتقارب قد يكون مساويا الصفر كما فى حالة اسقاط ميركاتور حيث خطوط الطول مستقيمات عمودية على الاستواء ولها نفس اتجاه شمال الخريطة ، وقد تصل قيمة التقارب إلى ١٨٠ ° كما فى حالة الأسقاط الأستريوجرافيكى القطبى (Polar Stereographic). وفى شكل (٢٢) مقدار التقارب عند نقطة B هو الزاوية C (الزاوية PBN) حيث BP هو اتجاه الطول عند B (الشمال الحقيقى) ، BN اتجاه شمال الخريطة. فى حين أن التقارب عند A هو الزاوية C^1 (الزاوية (P'AN').

٨ - أقصر خط بين نقطتين على السطح الكروى أو السطح الأسفرويدى للأرض هو الخط الجيوديسى (Geodesic) وهو يمثل قوس من دائرة عظمى عند اسقاط الكرة ويظهر فى بعض المساقط على شكل خط منحنى مثل ما هو مبين فى شكل (٢٠) وشكل (٢٢) حيث الخط ADB هو الخط الجيوديسى ويلاحظ أن هناك اختلاف زاوى عند نهايتى هذا الخط مع الوتر الواصل مباشرة بين النقطتين A ، B وقد يكون هذا الأختلاف الزاوى عند الطرفين للخط متساوى وقد يختلف ، فمقداره عند A يساوى 'δ وعند B يساوى δ ويطلق عليه (التصحيح للقوس والوتر) Arc to Chord Correction - وتعيين مقداره هام جدا خاصة إذا ما أردنا تعيين الأنحراف الزوالى لخط من الأنحراف عن اتجاه الشمال للخريطة ، فمثلا:

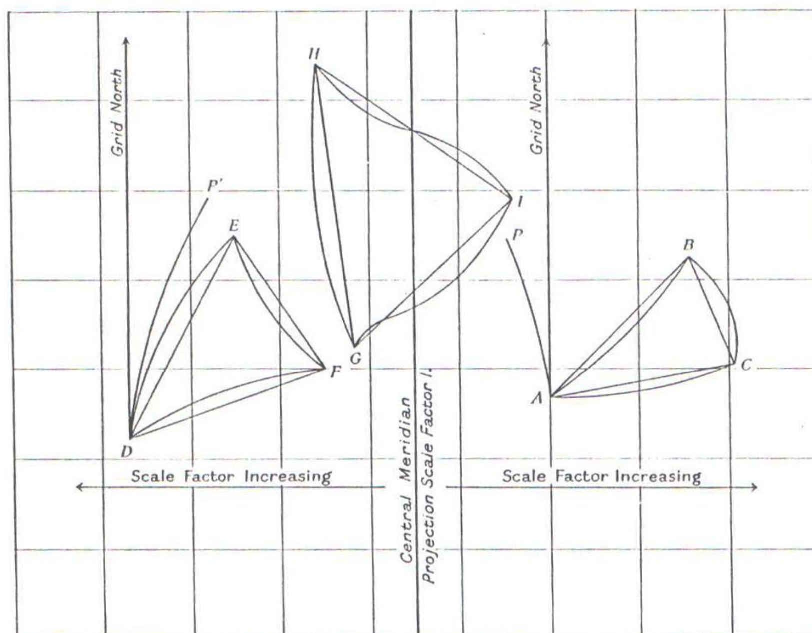
Azimuth at B = $\alpha' + C + \delta$

Azimuth at A = $\alpha' + C' - \delta'$

ويطلق أحيانا على (التصحيح للقوس الوتر) الرمز (t - T).


P
P′
10
N
20
20
N′
20
C′
North
C
A
δ′
Azimuth
α.
Azimuth
D
α
δ
10
B
10
East
C
10
20

شکل (۲۲)


Grid North
Grid North
H
I
P′
E
P
B
G
F
C
A
D
Scale Factor Increasing
Central Meridian
Projection Scale Factor 1
Scale Factor Increasing

شکل (۲۳)

ويجدر الأشارة هنا إلى أن الخط الجيوديسى هو خط النظر بين طرفى الخط على السطح الأسفرويدى للأرض .

تحديد اشارة التصحيح للقوس الوتر وللتقارب:

من الأهمية معرفة اتجاهات التقوس للخطوط الجيوديسية الواصلة بين النقط على الخريطة لأن اتجاه التقوس هو الذى يحدد اشارة المقدار (δ) وبالتالى يحدد العلاقة الصحيحة التى تربط بين الأنحراف الزوالى (الحقيقى) والأنحراف المقاس من الخريطة لخط مثل AB فى شكل (٢٢) . وكقاعدة عامة يكون مركز التقوس للخطوط الجيوديسية فى الخريطة ناحية النقطة أو الخط التى أو الذى ينعدم فيه التشويه - أى النقطة ذات مقياس الرسم الأساسى أو الخط ذو المقياس الأساسى. ففى كل (٢٣) مبين خريطة معدة بمسقط ميركاتور المستعرض وبين عليها خط الطول الأوسط (دائرة تماس الأسطوانة مع سطح الأرض) وهو فى نفس الوقت الخط ذو المقياس الرسم الأساسى الثابت.

ولقد بينا على الخريطة ثلاثة مثلثات الأول ABC إلى يمين خط الطول الأوسط والثانى DEF إلى يسار خط الطول الأوسط ، أما الأخير GHI فهو يقطع خط الطول الأوسط. فإذا ما أردنا رسم المنحنيات التى تمثل الخطوط الجيوديسية الواصلة بين أى نقطتين فى كل مثلث فإننا نتبع القاعدة السابق ذكرها. وعلى ذلك يكون مركز التقوس إلى اليسار بالنسبة لجميع خطوط المثلث ABC ، وإلى اليمين لجميع خطوط المثلث DEF ، اما بالنسبة للمثلث GHI فالوضع يختلف حيث نجد أن مركز التقوس للخط GH يقع جهة اليمين فى حين للخط HI والذى يقطع خط الطول الأوسط فأن الخط الجيوديسيى يكون له تقوسين ويكون على شكل منحنى عكسى له مركزى تقوس ، وكذلك بالنسبة للخط GI . وبعد تحديد اتجاهات التقوس لكل خط جوديسى وكذلك معرفة خطوط الزوال المارة بكل نقطة يمكن بسهولة تحديد اشاره المقدار δ وكذلك اشارة زاوية زاوية التقارب C.

ومعرفة اشارات التصحيح للقوس (t - T) هامة أيضا فى حالة حساب زوايا المثلث الكرى على سطح الارض من الزوايا للمثلث المستوى المناظر المرسوم فى الخريطة. ففى شكل (٢٣) تكون زاوية المثلث الكرى

ABC عند نقطة A هى الزاوية بين المنحيين AB ، AC اللذان يمثلان الخطـوط الجيوديسـية ، ومقـدار هـذه الزاوية يساوى الزاوية المستوية بين الخطين المستقيمين AB ، AC مضافا إليها الفرق الجبرى لزوايا التصحيـح للقوس الوتر (δ) عند نقطة A أى أنه فى هذه الحالة يكون مقدار الزاوية الجيوديسية عند نقطة A مساويا :

الزاوية الجيوديسية = الزاوية المستوية + $(\delta_{AB} - \delta_{AC})$

وواضح تماما من المعادلة السابقة أهمية معرفة اشارات δ

ولبيان أهمية معرفة اشارة التقارب C نأخذ النقطة A ، والنقطـة D كمثـال حيـث المطلـوب تعييـن الأنحـراف الجغرافى عندهما بمعلومية الانحراف من شمال الخريطة ومقدار (T - t) ، C.

فعند نقطة A حيث اتجاه خط الزوال هى AP :

الانحراف الجغرافى للخط AB = الانحراف من شمال الخريطة + C + δ_{AB}

اما عند نقطة D حيث اتجاه خط الزوال هو 'DP :

الانحراف الحقيقى (الجغرافى) للخط DE = الانحراف من شمال الخريطة − 'C − δ'_{DE}

الحسابات الخاصة بالمساقط المختلفة

فيما يلى سنوضح بعض انواع المساقط لسطح الأرض وكيفية حساب الاحداثيات للنقط على الخريطة بمعلومية الاحداثيات الجغرافية على السطح الكروى أو الأسفرويدى للأرض والحسابات الخاصة بتعيين الانحراف الحقيقى لخط على الخريطة ومعامل مقياس الرسم عند اى نقطة وزوايا التقارب والتصحيح (للقوس–الوتر)... الخ.

أولا المساقط الأسطوانية

Cylindrical Projections

فيما يلى سنبين الطرق الحسابية للحصول على الخرائط عند استخدام المساقط الأسطوانية وتحديدا فى حالة الاسقاط الاسطوانى الذى محوره ينطبق على محور الأرض (اسقاط ميركاتور) والأسقاط الأسطوانى المستعرض الذى محوره عمودى على محور الأرض.

اسقاط ميركاتور الأسطوانى التشابهى

Mercator Conformal Projection

ويعتبر اول مسقط تشابهى حقيقى (انحرافى) استخدم لرسم الخرائط وقد صمم بواسطة جيرار دوس ميركاتور الهولندى فى عام ١٥٦٩ ليعطى الملاحين خريطة تسهل لهم التعرف على خطوط السير بالبحار لاستخدامه فى الملاحه البحرية.
ويمكن وضع هذا النوع من الأسقاط فى التصنيف الخاص به من التصنيفات التى سبق وان ذكرناها سابقا عند تقسيم انواع المساقط:

فمن حيث سطح الاسقاط : فهو اسقاط اسطوانى

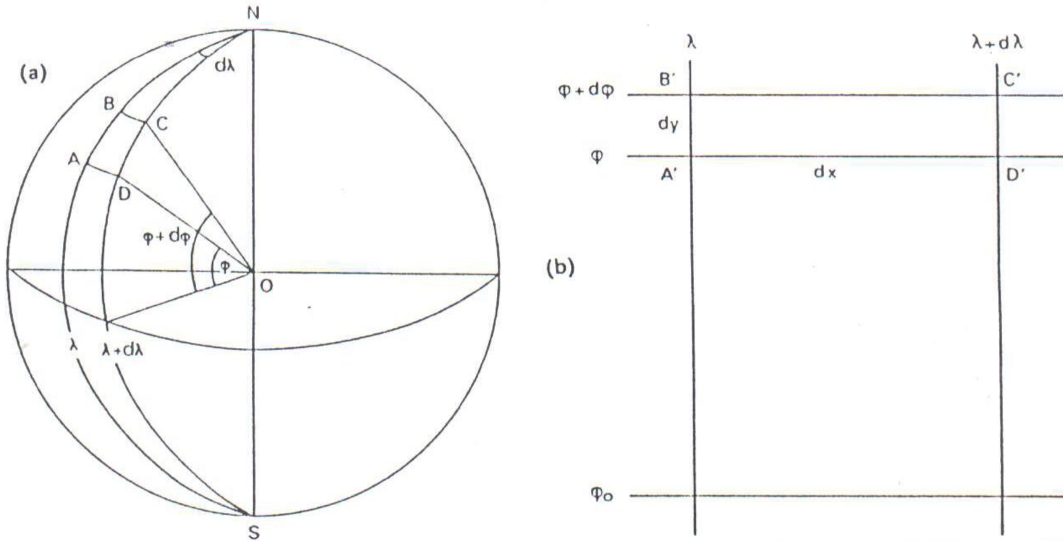
ومن حيث وضع الأسقاط بالنسبة للأرض : فهو اسقاط (عادى) لان الاسطوانه تمس الشكل الاسفرويدى للأرض (أو الكروى) فى خط الأستواء، وعليه فإن شبكة خطوط الطول والعرض على الخريطة متماثلة حول المحورين السينى والصادى وعلى ذلك لاداعى لاتمام الحسابات لجميع نقط سطح الأرض انما يكتفى بحساب احداثيات اركان ربع الشبكة فقط واستنتاج الباقى بالتماثل.

ومن ناحية التحويل Transformation : فهى رياضة حيث تسقط النقط على سطح الأسطوانة بحيث تفى بشرط التشابه Conformality .

ومن ناحية الخصائص Properties: فهو اسقاط تشابهى يحفظ الزوايا حول كل نقطة.

ويمكن استنتاج معادلات التحويل الخاصة بهذا الاسقاط على اعتبار **الشكل الكروى** للأرض كما يلى:

شكل (٢٤-a) يبين تمثيل شكل رباعى ABCD على السطح الكروى للأرض، فى حين يمثل شكل (٢٤-b) تمثيل هذا الشكل الرباعى على المسقط (الخريطة) حيث ظهر على صورة الشكل A'B'C'D'



شكل (٢٤)

وحسب ما سبق وان عرفنا مقايس الرسم عند النقط المختلفة على الخريطة، فإن مقياس الرسم الخاص بالنقطة A' فى اتجاه خط الطول سيكون مساويا:

$$h = \frac{dy}{R.\,d\Phi} \qquad (A)$$

حيث dy طول مسافة متناهيه فى الصغر فى اتجاه خط الطول فى الخريطة عند نقطة A .
$R.d\phi$ = طول المسافة المناظرة لها على السطح الكروى (مسافة على خط طول). وبالمثل يكون مقياس الرسم الخاص بالنقطة A' فى اتجاه خط العرض مساويا:

$$K = \frac{dx}{R\cos\Phi.\,d\lambda} \qquad (B)$$

حيث:
dx طول المسافة المتناهيه فى الصغر فى اتجاه خط العرض عند نقطة A'
$R\cos\Phi.\,d\lambda$ = طول المسافة المناظره لها على السطح الكروى (مسافة مقاسة على خط العرض).

ويلاحظ فى شكل (٢٤) ان خطوط الطول المرسومة تظهر فى الأسقاط على هئية خطوط مستقيمة متوازية عمودية على الخط الذى يمثل خط الأستواء وكذلك خطوط العرض عامة وذلك لان الأسقاط المطلوب تشابهى يحفظ الزوايا وهى ٩٠° بين خطوط الطول والعرض والمسافات بين خطوط الطول متساوية **لان المسافات المقاسة** على خط الاستواء حقيقية حيث ان خط الأستواء هو خط تماس الأسطوانة والكرة وهو خط ذو تشوه صفرى وبذلك فإن المسافة dx تكون هى زاتها عند اى خط عرض وتساوى:

$$dx = R.\,d\lambda$$

وبذلك فإن

$$K = \frac{R.\,d\lambda}{R.\cos\phi.\,d\lambda}$$

$$K = \frac{1}{\cos\phi}$$

$$\boxed{K = \sec\phi} \qquad (20)$$

اى ان مقياس الرسم فى اتجاه خطوط العرض يتغير بتغير مقدار قاطع الزاوية ϕ (خط العرض)

وحيث ان الأسقاط المطلوب تشابهى فإن مقياس الرسم عند النقطة الواحدة فى جميع الاتجاهات واحد. وعلى ذلك فإن:

$$\boxed{h = k = \sec\phi} \qquad (21)$$

وبالرجوع الى المعادلات (A)،(B) نحصل على:

$$\frac{dy}{Rd\phi} = \frac{dx}{R\cos\phi.\,d\lambda} = \frac{Rd\lambda}{R\cos\phi.\,d\lambda}$$

ومنها

$$dy = R.\frac{d\phi}{\cos\phi}$$

$$y = R\int \sec\phi.\,d\phi$$

وحل هذا التكامل يعطى بالمعادلة

$$\boxed{y = R \cdot \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} \qquad (22)$$

وهذه المعادله يمكن استخدامها على الصورة

$$y = R \ln \tan(\sec\phi + \tan\phi) \qquad (23)$$

وبالطبع فإن:

$$x = R.\lambda^{\circ}\frac{\pi}{180^{\circ}} \qquad (24)$$

وعلى ذلك يتم رسم شبكة خطوط الطول والعرض حيث خطوط الطـول متوازيـة فيمـا بينهمـا وعمودية على خطوط العرض.

ويمكن بسهولة استنتاج ان:

$p = \sec^2 \phi$ مقياس المساحة

$w = o$ مقدار التشوه الزاوى

ومما سبق يمكن ان نلخص خصائص المسقط فيما يلى:

١- مقياس الرسم متساوى على خطوط الطول والعرض عند اى نقطه ويساوى مقياس الرسم الأساسى عند خط الأستواء مضروبا فى (قا ϕ)
٢- مقياس الرسم للمساحات عند اى نقطة يساوى مقياس رسم المساحة عند خط الأستواء مضروبا فى(قا$^2\phi$)
٣- الأطـوال تسـقط اكبر مـن اطوالهـا الحقيقيـة علـى اتجـاه خطـوط الطـول واتجـاه خطـوط العرض
٤- الأشكال تسقط باشكالها الحقيقية ومساحتها الحقيقية واطوالها الحقيقية عند خط الأستواء.

وفى الجدول التالى مبين القيم المحسوبة للأحداثى الرأسـى (y) ولمقـاييس الرسـم فـى اتجـاه خطوط الطول والعرض التى تباعد عن بعض بمقدار ($\Delta\phi = 15^{\circ}$) . وقيم y فـى الجـدول محسـوبة على اساس نصف قطر الأرض الكروية يساوى الوحدة.

Mercator Projection. Values for the ordinate, particular scales and distortion characteristics for 15° graticule.

Latitude	Ordinate	Particular scales	Area scale	Maximum angular deformation
φ	y	$h=k$	p	ω
0°	0·0000	1·0000	1·0000	0°
15	0·2649	1·0353	1·0719	0°
30	0·5493	1·1547	1·3333	0°
45	0·8814	1·4142	2·0000	0°
60	1·3170	2·0000	4·0000	0°
75	2·0276	3·864	14·931	0°
90	∞	∞	—	180°

وعند اعداد خريطة ميركاتور لمنطقة محدودة من سطح الأرض بعيدة عن خط الأستواء فإننا نجد أن جميع الأطوال على المسقط أكبر بكثير من الأطوال المناظرة على سطح الأرض، لذا نختار خط العرض الأوسط ϕ_o للمنطقة ونستعيض به عن خط الاستواء وعلى ذلك يكون مقياس الرسم الأساسى للخريطة مساويا الوحدة عند هذا الخط. أى أن:

$$\mu_o = \frac{dx}{R\cos\phi_o . d\lambda} = 1$$

ومنها

$$x = R\cos\phi_o . \lambda^\circ . \frac{\pi}{180^\circ} \qquad (25)$$

$$y = R.\cos\phi_o .\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right) \qquad (26)$$

وبذا نكون قد صغرنا حجم الخريطة بنسبة جيب تمام العرض الأوسط المنطقة، وعليه تقترب الأطوال على المسقط من القيم الحقيقية لها على سطح الأرض.

مثال

المطلوب رسم خريطة باسقاط ميركتور لمساحة من الأرض محصورة بين خطى طول λ_1 ، λ_2 هما ١٠°، ٤٨° غربا. وخطى عرض ϕ_1، ϕ_2 هما ٣٦° ، ٥٨° شمالا.بين على هذه الخريطة شبكة خطوط الطول والعرض والتى تتباعد على الأرض فى الأتجاهين بمقدار ٢° (مقياس الرسم المطلوب ١:٢ مليون)

الحل:

خط العرض الأوسط = $\frac{٥٨+٣٦}{٢}$ = ٤٧° ش

بأعتبار ان نصف قطر الأرض = ٦٣٧٠ كيلو متر فإن مقدار نصف القطر بمقياس الرسم المطلوب R = ٣١٨،٥٠ سم.

المسافة بين خطى طول (١٠° الى ٤٨° غ) على الخريطة = L_1

$$L_1 = R\cos\phi_o \frac{\Delta\lambda^\circ}{180^\circ} . \pi$$

$$L1 = 318.50\cos 47^\circ \times \frac{(48-10)}{180} \times \pi = 144.063\,cm$$

المسافة من الاستواء الى خط عرض ٣٦° ش على الخريطة= y_{36}

$$y_{36} = 318.50 \times \cos 47^\circ \times \ln\tan\left(45^\circ + \frac{36^\circ}{2}\right) = 146.464\,cm$$

وبالمثل تحسب المسافة من الأستواء إلى خط عرض ٥٨ ° شمالا على الخريطة حيث :

$$y_{58} = 318.50 \times \cos 47° \ln \tan(45° + \frac{58°}{2}) = 271.338 cm$$

وبذلك تكون المسافة بين خطى عرض ٣٦ ° ش ، ٥٨ ° ش على الخريطة هى L_2 وهى تساوى:

$$L_2 = y_{58} - y_{36} = 271.338 - 146.464 = 124.874 \text{ cm}$$

وعليه فإن الخريطة المطلوبة سيكون عرضها مساويا ١٤٤,٠٦٣ سم وطولها (أرتفاعها) ١٢٤,٨٧٤ سم ولرسم شبكة خطوط الطول والعرض عليها نجد أن خطوط الطول ستكون متوازية فيما بينهما وتتباعد مسافات ثابته قدرها x_o حيث:

$$x_o = 318.50 \cos 47° \times \frac{2°}{180°} \times \pi = 7.582 cm$$

اما خطوط العرض المتوازية فيما بينهما - والعمودية على خطوط الطول - فإن المسافات بينهما غير ثابتة وتكبر كلما اتجهنا شمالا وتحسب المسافة بين أى خطى عرض بدءا من خط عرض ٣٦ ° شمالا (الحدود الدنيا للخريطة) حيث المسافة بين خطى عرض ٣٦ ° ، ٣٨ ° شمالا ستكون مساوية:

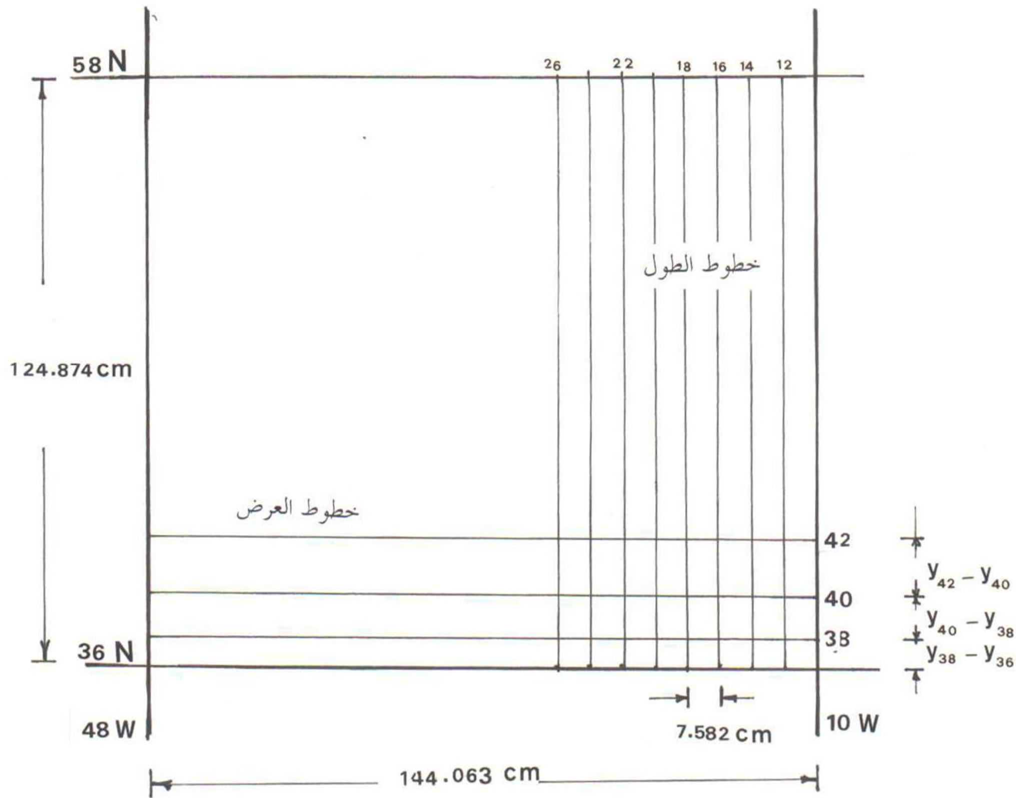
$$(y_{38} - y_{36})$$

والمسافة بين خطى عرض (٣٨ ° ، ٤٠ °) ستكون مساوية

$$(y_{40} - y_{38})$$

وهكذا ....

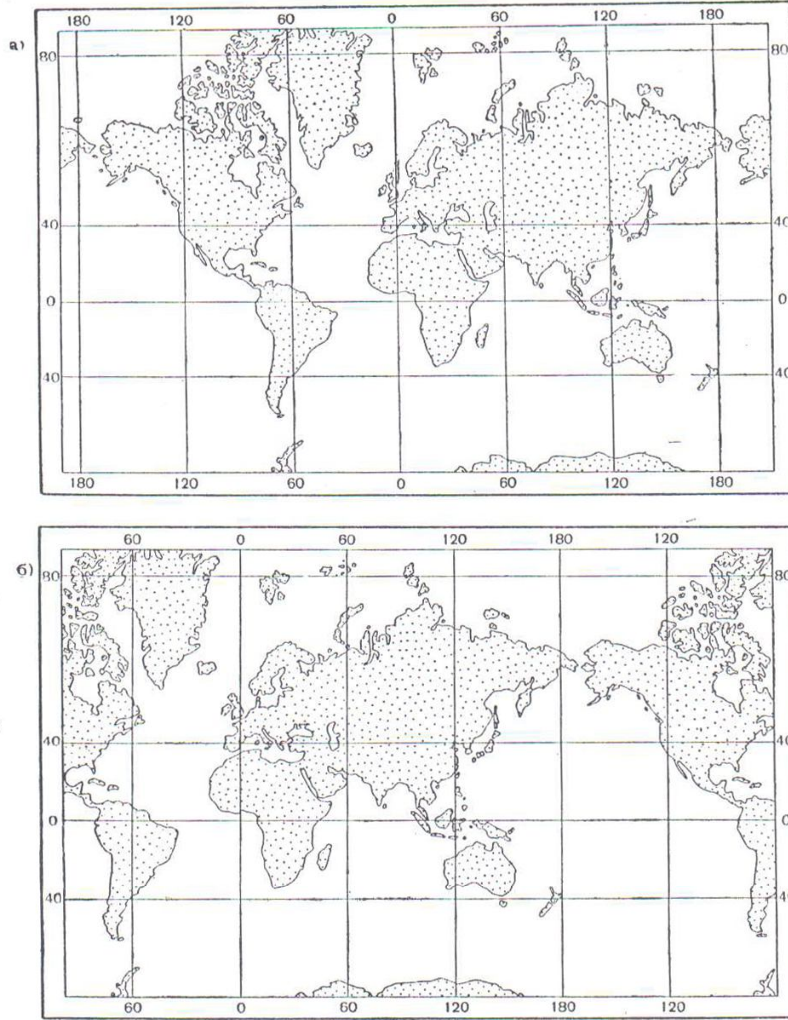
وبذا يتم رسم شبكة خطوط الطول والعرض بالاستعانة بالكروكى الموضح فى شكل (٢٥):



شكل (٢٥) كروكى الخريطة الموقع عليها شبكة خطوط الطول والعرض

ملحوظة هامة :

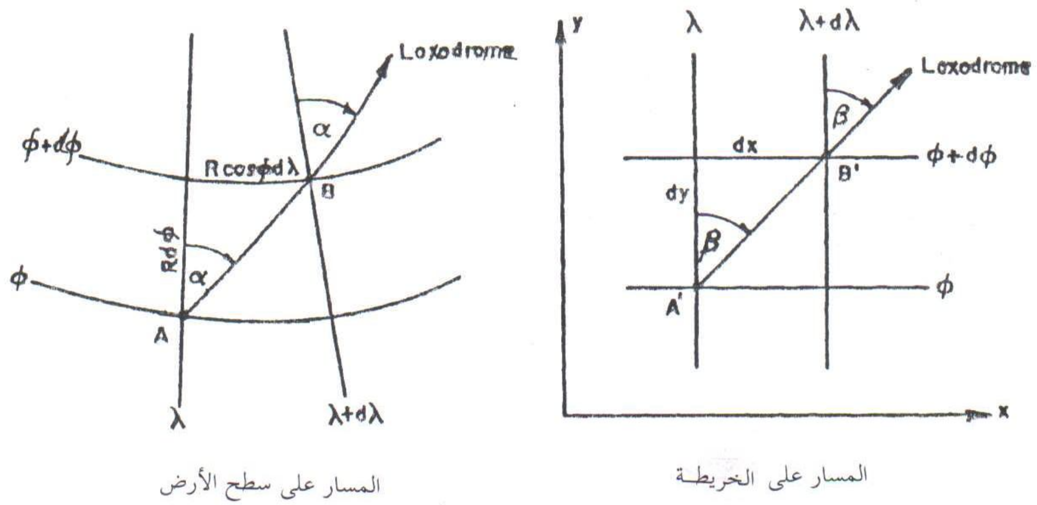
عند رسم شبكة خطوط الطول والعرض فى الخريطة بالأحداثيات (x,y) المحسوبة من معادلات التحويل تكون هناك نقطة أصل للأحداثيات يمر بها الخط الممثل لخط الأستواء ذو التشوية الصفرى (أو خط العرض الأوسط للمنطقة المسقطة) وعمودى عليه يمر خط طول قد يكون هو خط زوال جرينتش أو أى خط زوال آخر. وهذا موضح فى شكل (٢٦) والذى يبين خريطتين لسطح الأرض كله اعدتا بأسقاط ميركاتور حيث كانت نقطة الأصل فى الخريطة الأولى هى نقطة تقاطع الخط الممثل لخط الاستواء مع الخط الممثل لخط طول ١٠ ° شرقا ، أما الخريطة الثانية - السفلى - فهى تمثل أيضا سطح الأرض حيث كانت نقطة الأصل هى تقاطع خط الأستواء مع خط طول ١٠٠ ° شرقا. ويلاحظ أن التغيير لخط الطول هذا لا يؤثر فى انشاء الخريطة.



شكل (٢٦)

استخدامات الخرائط المنشأه بأسقاط ميركاتور التشابهى

ان الأستخدام الأساسى لأسقاط ميركاتور التشابهى هو فى انشاء الخرائط الملاحية وذلك لأن مسار السفينة الذى له انحراف ثابت بين نقطتين يظهر على الخريطة على هيئة خط مستقيم يصل بين نقطتى القيام والوصول. وهذا الخط المستقيم يصنع مع خطوط الزوال المتوازية فى الخريطة زاوية تساوى الانحراف الحقيقى للمسار كما هو موضح فى شكل (٢٧) والذى يوضح المسار على سطح الأرض وعلى الخريطة. ويجدر التنوية هنا إلى أن هذا المسار على سطح الأرض لا يمثل أقصر مسافة بين النقطتين (أى ليس هو الخط الجيوديسى) وانما



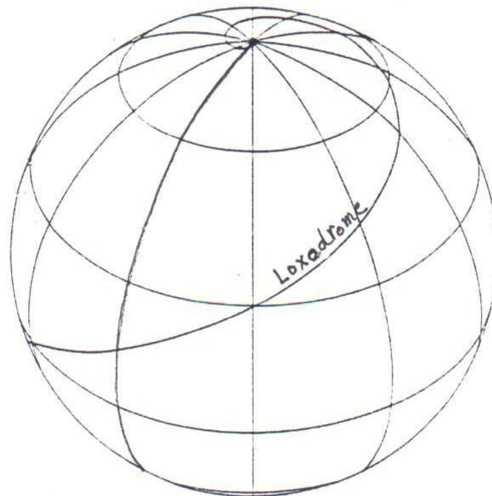
المسار على سطح الأرض

المسار على الخريطـة

Differential element of loxodrome on the sphere
and its cylindric projection

شكل (٢٧)

هـــو عبــاره عـــن منحنى حلزونى علـى سطح الأرض (شكل ٢٨) يطلق عليه اسم اللوكسودروم The Loxodrome أو الخط ذو الانحراف الثابت Rhumb - Line



The representation of a rhumb-line on the spherical surface.

شكل (٢٨)

اسقاط ميركاتور للشكل الأسفرويدى للأرض

يمكن استنتاج معادلات التحويل الخاصة باسقاط ميركاتور بأخذ فى الاعتبار **الشكل الأسفرويدى للأرض.** فإذا اعتبرنا أن M هو نصف قطر الأنحناء لنقطة على السطح وذلك فى اتجاه الزوال ($M = \rho$) وان نصف قطر التقوس لنفس النقطة فى المستوى العمودى على الزوال هو N ($N = \gamma$) وأخذنا مسافتين صغيرتين $d\zeta$, $d\eta$, عند هذه النقطة على السطح وفى اتجاهى خطوط العرض وخطوط الطول على الترتيب حيث الاحداثيات الجغرافية لهذه النقطة هى (λ,ϕ)وكانت المسافتان المقابلتان (لهاتين المسافتين) على مستوى الخريطة (مستوى الاسقاط) هما dy, dx على الترتيب فإنه حسب نظرية التشابه يكون:

$$\frac{dx}{d\zeta} = \frac{dy}{d\eta}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\zeta}{d\eta} \qquad \text{(c)}$$

والمسافة $d\zeta$ على الأسفرويد هى مسافة مقاسة على خط عرض وبذا تكون مساوية

$$d\zeta = N.\cos\phi\,.\,d\lambda$$

اما المسافة $d\eta$ فهى مسافة مقاسة على خط طول وتكون مساوية

$$d\eta = M.\,d\phi$$

حيث N , M أنصاف أقطار التقوس عند نقطة على سطح الأرض الأسفرويدى فى مستوى الزوال والمستوى العمودى على الزوال.وبالتعويض فى معادلة التشابه (C) نحصل على :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{N\cos\phi d\lambda}{Md\phi} \qquad \text{(D)}$$

وحيث أن المسافات حقيقية على خط الاستواء فإن:

$$dx = a.\,d\lambda \qquad \text{(E)}$$

حيث a نصف القطر الأكبر للقطع الناقص زوال السطح. وبالتعويض من المعادلة (E) في المعادلة (D) نحصل على:

$$dy = a.\frac{M}{N}\sec\phi\, d\phi$$

وبالرجوع إلى قيم M , N لشكل الأرض الأسفرويدى نجد أن :

$$\frac{M}{N} = \frac{1-e^2}{1-e^2\sin 2\phi}$$

$$dy = \frac{a(1-e^2)\sec\phi . d\phi}{1-e^2\sin 2\phi}$$

وعلى ذلك تكون المسافة على الخريطة من خط الاستواء وحتى خط العرض ϕ مساوية :

$$y = a\int_{\phi}^{o}\frac{(1-e^2)\sec\phi}{1-e^2\sin^2\phi}d\phi$$

ولتسهيل حساب هذا التكامل يمكن استخدام زاوية مساعدة ψ حيث :

$$\sin\psi = e\sin\phi$$

فتكون قيمة التكامل مساوية:

$$y = a\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right) - a.e\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right) \quad (28)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة التالية:

$$y = a\left[\ln(\tan\phi+\sec\phi) - e.\ln(\tan\psi+\sec\psi)\right] \quad (29)$$

وبالطبع فإن :

$$x = a.\ \lambda \tag{30}$$

وحيث أن المسقط تشابهى فإن مقياس الرسم عند النقطة الواحدة فى أى اتجاه هو نفسه مقياس الرسم فى اتجاه خطوط العرض K أو اتجاه خطوط الطول h

$$k = \frac{dx}{N\cos\phi d\lambda}$$

$$= \frac{a.d\lambda}{N\cos\phi.d\lambda}$$

$$K = \frac{a}{N\cos\phi} = h = \mu \tag{31}$$

وبذلك يزداد مقياس الرسم كلما بعدنا عن خط الأستواء الذى يكون عنده مقياس الرسم حقيقى.

وفى حالة تمثيل جزء من سطح الأرض فقط على الخريطة محصور بين خطى عرض ϕ_1 ، ϕ_2 فإن مقياس الرسم يجب تعديله لكى يكون حقيقيا عند خط العرض الأوسط للخريطة ϕ_o ويتم ذلك بان تضرب كل من X ,Y المحسوبة من معادلات التحويل السابقة فى المقدار :

$$\frac{N\cos\phi_o}{a}$$

وعلى ذلك تكون معادلتى التحويل لأسقاط ميركاتور بأستخدام عرض أوسط ϕ_o هى :

$$x = N\cos\phi_o.\ \lambda^\circ.\ \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$y = N\cos\phi_o\left[\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right) - e.\ \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\right] \tag{32}$$

حيث:

$$\psi = \sin^{-1}(e\sin\phi)$$

أو تحسب قيم y من المعادلة

$$y = N \cos \phi_o [\ln (\tan \phi + \sec \phi) - e. \ln (\tan \psi + \sec \psi)]$$

كما يمكن حساب الاحداثى y بدون الاستعانة بالزاوية المساعدة (ψ) وذلك من المعادلة التالية :

$$y = a. \cos \phi_o . \ln \left\{ \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})(\frac{1 - e. \sin \phi}{1 + e. \sin \phi})^{\frac{e}{2}} \right\} \quad (33)$$

حيث a نصف القطر الأكبر للقطع الناقص زوال السطح الأسفرويدى للأرض

e الأختلاف المركزى الأول لهذا القطع الناقص.

تمرين :

حدد الخريطة المرسومة بأسقاط ميركاتور للمنطقة المحددة فى المثال السابق إذا كان شكل الأرض المستخدم هو الشكل المعين بنظام GRS لسنة ١٩٨٠ حيث :

$$a= 6378137 \text{ m} \ \& \ b = 6356752.3 \ \alpha = 1:298.26$$

معامل مقياس الرسم فى اسقاط ميركاتور التشابهى:

يكون معامل مقياس الرسم مساويا الوحدة على امتداد خط الاستواء (الخط ذو التشوه الصفرى) ويزداد كلما اتجهنا شمال أو جنوب خط الاستواء. وعند نقطة معينة على خط عرض ϕ يكون معامل مقياس الرسم (Scale Factor) مساويا

$$\text{Scale factor} = \frac{a}{N. \cos \phi} \quad (34)$$

حيث a النصف القطر الأكبر للقطع الناقص زوال السطح الأسفرويدى للأرض

N نصف قطر التقوس عند النقطة فى المستوى العمودى على الزوال.

وفى حالة التقريب للشكل الكروى للأرض فإن $a = N = R$ وعليه يكون معامل مقياس الرسم مساويا:

$$\text{Scale Factor} = \frac{1}{\cos\phi} = \sec\phi \qquad (35)$$

وإذا كان هناك خط على الخريطة يصل بين النقطتين B , A وكان معامل مقياس الرسم عند النقطة A مساويا x ومعامل مقياس الرسم عند النقطة B مساويا y وكان معامل مقياس الرسم عند منتصف الخط يساوى Z فإن القيمة المتوسطة لمعامل مقياس الرسم لكل الخط تكون مساوية:

$$\text{Mean scale factor} = \frac{x + 4z + y}{6} \qquad (36)$$

زاوية التقارب فى اسقاط ميركاتور التشابهى :

ليس هناك تقارب فى هذا النوع من الأسقاط حيث تنطبق الخطوط الممثلة لخطوط الزوال مع اتجاه شمال الخريطة وعلى ذلك تكون قيم زوايا التقارب (C) مساوية الصفر.

التصحيح للقوس الوتر (t - T) فى اسقاط ميركاتور التشابهى :

إذا كان هناك خط يصل بين نقطتين B , A احداثياتهما الجغرافية هى : $(\phi A, \lambda A), (\phi B, \lambda B)$ فإنه يمكن حساب زاوية التصحيح (δ) بين اتجاه القوس واتجاه الوتر الواصل بين النقطتين عند الطرف A أو الطرف B من المعادلة الآتية :

$$\delta = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\phi_m}{\cos\frac{\delta\phi}{2}} . \tan\frac{\delta\lambda}{2}\right] \qquad (37)$$

$$\phi_m = \frac{1}{2}(\phi_A + \phi_B)$$

$$\delta\phi = (\phi_B - \phi_A)$$

$$\delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$$

ويلاحظ هنا اننا اعتبرنا أن δ عند طرفى الخط متساوية وأن كانت عادة تكون زات قيم مختلفة عند الطرفين ولكن الفرق صغير جدا بحيث يمكن اهماله. وفى الخطوط التى يقل طولها عن ١٦٠كيلو متر يمكن حساب مقدار زاوية (δ) من المعادلة التقريبية التالية :

$$\delta_A = \delta_B = \frac{1}{2}(\lambda_B - \lambda_A).\sin\phi_m \qquad (38)$$

تمرين :

أربعة نقط على سطح الأرض A, B, C, D تحدد اركان مربع محصور بين خطى عرض ٥٢ ° شمالا ، ٥٣ ° شمالا وخطى طول ١٥ ° غربا ، ١٦ ° غربا والمطلوب :

١ - رسم شبكة الاحداثيات (Graticule) لهذه المنطقة بمقياس رسم ١ : مليون.

٢ - حساب معامل مقياس الرسم المتوسط للخط AC .

٣ - حساب الطول فى الخريطة والطول الحقيقى للخط AC .

٤ - حساب التصحيح للقوس الوتر عند النقطة A مع رسم شكل القوس على الخريطة (الخط الجيوديسى).

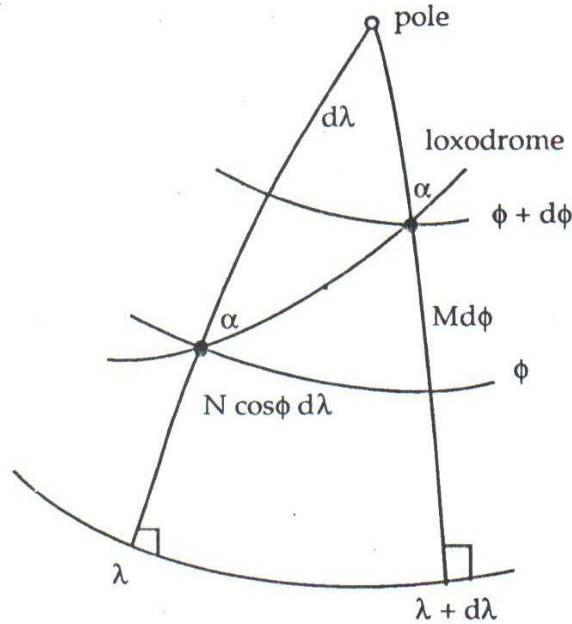
٥ - حساب انحراف AC فى الخريطة والأنحراف الزوالى الحقيقى عند كل من النقط C , A للخط الجيوديسى AC .

اعتبر شكل الأرض المحدد بالنظام G.R.S. لسنة ١٩٨٠ .

تعيين معادلة اللوكسودروم The Loxodrome :

شكل (٢٩) يوضح جزء من منحنى اللوكسودروم على السطح الأسفرويدى للأرض والواصل بين نقطتين احداثياتهما الجغرافية هى (λ,ϕ) ، $(\phi + d\phi ,\lambda + d\lambda)$ على الترتيب ، حيث يصنع منحنى اللوكسودروم مع خطوط الطول الزاوية الثابته α . ولما كانت المسافة المحصورة على خط العرض ϕ بين خطى الطول $\lambda + d\lambda$, λ مساوية للمقدار $N, Cos\phi.\ d\lambda$ – وكذلك المسافة المحصورة على خط الطول λ بين خطى العرض $\phi + d\phi$, ϕ تساوى $M.\ d\phi$ فإنه من شكل (٢٩) نجد أن :

$$\tan\alpha = \frac{N.\cos\phi.d\lambda}{M.d\phi} \qquad (39)$$



شكل (٢٩)

وعليه فأن :

$$d\lambda = \tan\alpha \frac{M}{N} . \sec\phi . d\phi$$

$$\therefore \lambda = \int_{0}^{\phi} \tan\alpha . \frac{M}{N} . \sec\phi . d\phi$$

وتكامل هذه المعادلة يعطى :

$$\lambda - \lambda_o = \tan\alpha . q$$

ومنها :

$$\boxed{\lambda = q . \tan\alpha + \lambda_o} \qquad (40)$$

حيث (q) يطلق عليها اسم خط العرض الأيزومترى **Isometric Latitude** وتحسب من المعادلة :

$$\boxed{q = \ln\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{1 - e\sin\phi}{1 + e\sin\phi}\right)^{\frac{e}{2}}\right\}} \qquad (41)$$

ولما كانت معادلات التحويل فى اسقاط ميركاتور هى:

$$q = \frac{y}{a} , \lambda = \frac{x}{a}$$

(راجع المعادلات ٣٠ ، ٣٣ عندما يكون ϕ_o هو خط الاستواء.)

وبالتعويض من هذه المعادلات (٤٢) تصبح معادلة اللوكسودودروم على الصورة :

$$\boxed{x = y . \tan\alpha + a . \lambda_o} \qquad (43)$$

وواضح أن هذه المعادلة تمثل خط مستقيم ذو ميل ثابت α يقطع محور السينات فى المسافة ($a . \lambda_o$).

المسألة العكسية فى اسقاط ميركاتور :

اذا ما كانت الاحداثيات فى الخريطة لنقطة ما هى **(x , y)** ويـراد تعيين احداثياتها الجغرافيـة على سطح الأرض فإننا نتبع الآتى:

١ – يتم حساب خط طول النقطة من المعادلة:

$$\lambda = \frac{x}{a} \qquad (44)$$

٢ – يتم حساب قيمة المقدار **(q)** من المعادلة :

$$q = \frac{y}{a} \qquad (45)$$

وبمعرفة قيمة المقدار **(q)** يمكن تعيين خط العرض **(ϕ)** وذلك من المعادلة **(٤١)**. وبالطبع الحصول على قيمة **(ϕ)** من هـذه المعادلـة ليس هينـا لـذا يستعان فـى الحل بـاحدى الطـرق العددية التى تصلح للتناول على الحاسب الآلـى مثـل طريقـة نيوتيـن رافســـن **(Newton - Raphson)** وفى الجدول التالى مبيـــن قيم خطوط العرض الأيزومترية المناظرة لقيم خطـوط العرض الجيوديسية للقيم من **ϕ** = صفر إلى **ϕ** = ٨٩ ° والمحسوبة لشكل الأرض لأفرسـت . ويلاحظ أن قيم **q** أصغر من قيم **ϕ** حتى خط العرض الجيوديسيـى ١١ ° ثم تصبح قيم **q** أكبر من **ϕ** إذا ما تدرجنـا مـن **ϕ** = ١١ ° إلـى **ϕ** = ٨٩ ° ويمكـن الاستعانة بهـذا الجـدول وبطريقة الاستكمال من الداخل فى الحصول على قيم **ϕ** مناظرة لقيم **q** وبالتـالى التحديـد التـام للأحداثيات الجغرافية لأى نقطة معلوم لها الأحداثيات على الخريطة .

Geodetic Latitude (ϕ)	Isometric Latitude (q)
1	0.9934132219
10	9.9851128986
11	10.9956288708
12	12.0096232035
20	20.2888725073
30	31.2726570656
40	43.4668126053
50	57.6161578380
60	75.1262119163
70	99.0738773214
75	115.8041916752
80	139.2112650896
85	179.0306399306
86	191.8283989049
87	208.3211451844
88	231.5595670367
89	271.2781638574

Table 1. Isometric and Geodetic Latitudes (units-degrees)

Everest Ellipsoid 1/f = 300.8017
a = 6377276.345

تمرين :

المطلوب حساب قيم **q** المناظرة لقيم ϕ لكى تصبح الفتـــرة فى الجدول السابق كل ١ ° وذلك

من ϕ = ١ ° حتى ϕ = ٢٩ ° وذلك لشكل الأرض لأفرست حيث :

a = نصف القطر الأكبر = ٦٣٧٧٢٧٦,٣٤٥ متر

α = نسبة الانبعاج = ١ : ٣٠٠,٨٠١٧

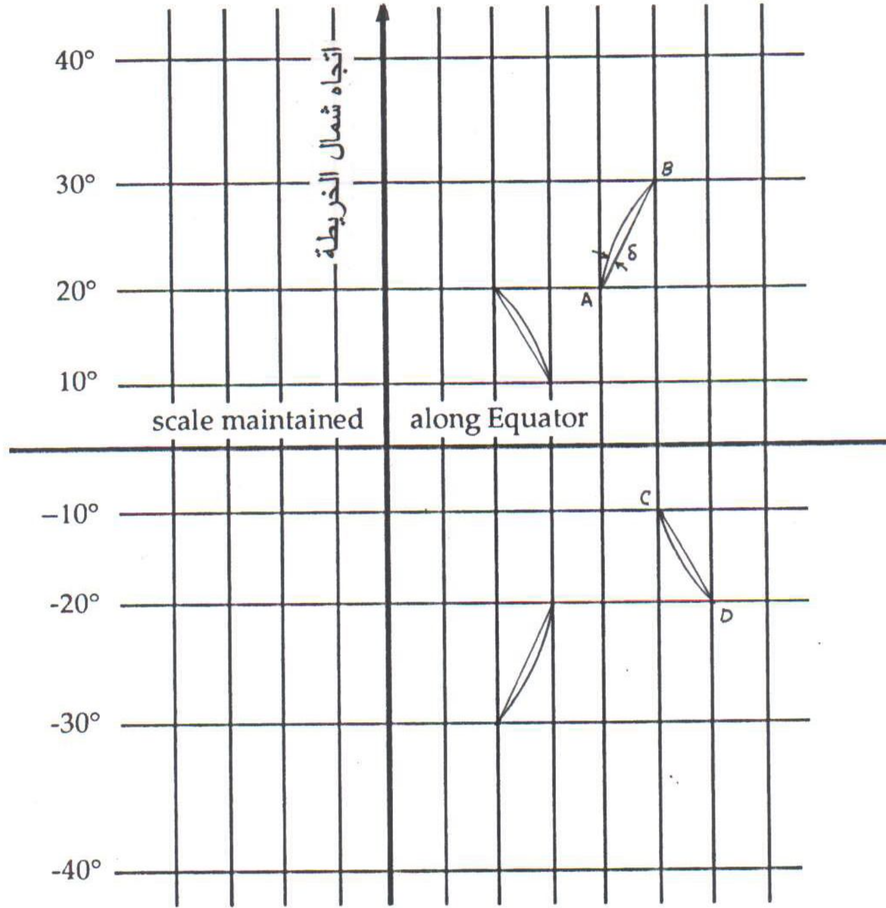
اسقاط ميركاتور الأسطوانى التشابهى

Mercator Conformal Projection

التحويل Transformation :

$$x = a\lambda \qquad q = \ln\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\phi}{1+e\sin\phi}\right)^{\frac{e}{2}}\right\}$$

$$y = aq$$



شكل (٣٠) Appearance of the Mercator Projection

الخصائص Properties:

(1) $C = 0$; ليس هناك تقارب فى هذا النوع من الأسقاط

(2) $k = 1$ along equator;

(3) meridians and parallels intersect at 90°;

(4) meridians are equally spaced;

(5) the spacings of parallels increase as one goes away from the equator.

(6) $$\delta = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\phi\ m}{\cos\frac{\delta\phi}{2}} . \tan\frac{\delta\lambda}{2}\right]$$ التصحيح للقوس الوتر

(7) $$\text{scale factor} = \frac{a}{N \cdot \cos\phi}$$ معامل مقياس الرسم

اسقاط مركاتور المستعرض
Transverse Mercation Projection

فى هذا النوع من المساقط يتم اسقاط سطح الارض على سطح اسطوانة قائمة محورها عمودى على محور الارض وبذلك تمس سطح الأرض (الكروى أو الأسفرويدى) على امتداد أحد خطوط الطول كما هو موضح فى شكل (١١ – ب). وكان أول من قدم هذا النوع من المساقط هو العالم يوهان هنريش لامبرت Johann Heinrich Lambert وذلك فى عام ١٧٧٢. وكان أول من قدم له معالجة رياضية هو جاوس فى عام ١٨٢٢ – أما التقديم الرياضى الحقيقى لهذا المسقط فقد كان على يد العالم ل. كروجر Kruger فى عام ١٩١٢ حيث قدم معادلات التحويل له مع امكانية التطبيق العددى لها. ويطلق عليه فى بعض الاحيان اسقاط جاوس التشابهى.

وقد روعى عند تصميم هذا المسقط التشابهى النقاط الثلاثة التالية:–

١ – مقياس الرسم حقيقى على امتداد خط التماس والذى يطلق عليه خط الطول الأوسط.

٢ – الحفاظ على خاصية التشابه.

٣ – نقطة الأصل فى الخريطة هى نقطة تقاطع خط الأستواء مع خط الطول الأوسط.

ويستخدم هذا النوع من الاسقاط لرسم الخرائط للمناطق على سطح الارض التى تمتد طوليا على جانبى خط طول معين يؤخذ كخط طول أوسط للمنطقة ويكون هو زاتة خط تماس الاسطوانة مع الارض وهو الخط الخالى من التشوه.

ولما كانت جمهورية مصر العربية تمتد بين خطى طول ٢٥ ° ، ٣٦ ° شرقا ، فلقد أختير اسقاط ميركاتور المستعرض لعمل جميع الخرائط المساحية لمصر مع اعتبار أن خط طولها الاوسط هى خط ٣١ ° شرقا . ولما كان التشويه فى شكل المعالم المرسومة على الخريطة يأخذ مكانه فى اسقاط ميركاتور المستعرض كلما ابتعدنا عن خط الطول الأوسط (الخط ذو التشويه الصفرى) بحيث تكون لهذا التشويه قيم ملموسة حسابيا بعد درجتين من خط الطول ، لذا اعتبرت مصر على هيئة ثلاثة شرائح عرض كل منها ٤ ° من خطوط الطول بحيث يكون التشويه منعدما عند عمل الخرائط المستقلة لكل شريحة طولية. وهذه الشرائح الثلاثة اختيرت كالتالى :

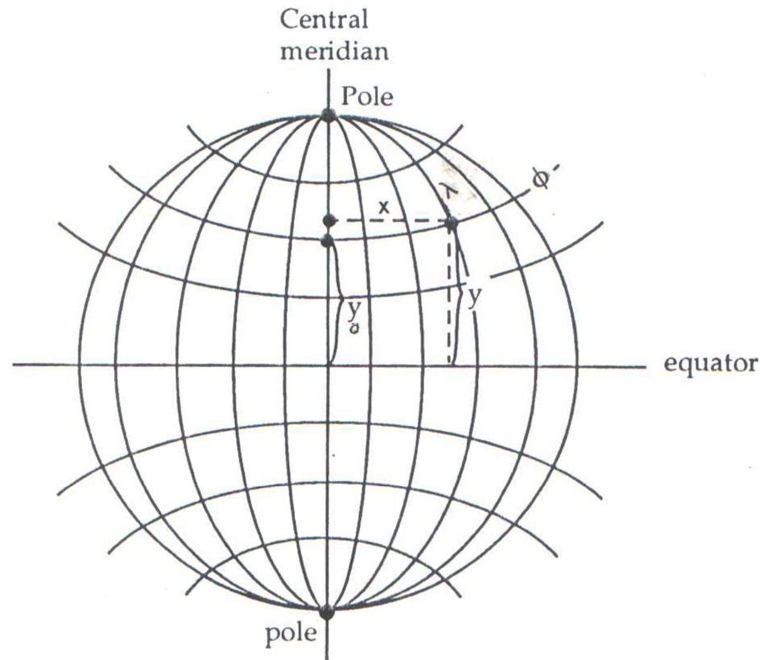
١ – الشريحة الأولى تمتد بين خطى ٢٥ ° ، ٢٩ ° شرقا بخط طول أوسط ٢٧ ° شرقا لتغطى منطقة الصحراء الغربية.

٢ – الشريحة الثانية تمتد بين خطى طول ٢٩ ° ، ٣٣ ° شرقا بخط طول أوسط ٣١ ° شرقا وهو خط الطول الذى يمر فى وادى النيل والدلتا ويتوسط مصر. وبذلك تغطى

هذه الشريحة كل وادى النيل والدلتا إلى العلمين من جهة الغرب والضفة الشرقية لقناة السويس من جهة الشرق.

٣ - الشريحة الثالثة وقد أخذت نظريا بعرض ٤ ° من خطوط الطول الا انها عمليا تمتد بين خطى طول ٣٣ ° ، ٣٦ ° شرقا (أى حتى حدودنا الشرقية تقريبا) بخط طول أوسط ٣٥ ° شرقا وهى بذلك تغطى سيناء وباقى الصحراء الشرقية.

وشكل (٣١) يبين شبكة خطوط الطول والعرض كما تظهر فى هذا النوع من الاسقاط حيث يظهر خط الأستواء (Equator) على الخريطة كخط مستقيم هو محور السينات لها. ويظهر عمودى عليه خط الطول الأوسط (Central Meridian) وهو خط مستقيم يمثل محور الصادات فى الخريطة وهو فى نفس الوقت اتجاه شمال الخريطة. أما باقى خطوط العرض وخطوط الطول فتظهر على هيئة منحنيات متماثلة على جانبى خط الأستواء (المحور السينى) وخط الطول الأوسط (المحور الصادى). وبما أن الأسقاط تشابهى فإن الزوايا بين خطوط الطول والعرض تظهر فى الخريطة قائمة أيضا. وخط الطول الأوسط فى الخريطة هو الخط ذو التشويه الصفرى ويكون عنده مقياس الرسم الأساسى مساويا للوحدة.



Appearance of the Transverse Mercator

شكل (٣١)

معادلات التحويل لأسقاط ميركاتور المستعرض
للشكل الكروى للأرض

بنفس أسس الأسقاط التشابهى التى استخدمت لاستنتاج معادلات التحويل لاسقاط ميركاتور التشابهى يمكن الحصول على معادلات التحويل لاسقاط ميركاتور المستعرض. فإذا كانت الاحداثيات الجغرافية لنقطة على سطح الارض هى (ϕ, λ) وكان خط الطول الأوسط للمنطقة هو (λ_o) فإن احداثيات النقطة فى الخريطة (انظر شكل ٣١) تكون (X , Y) فإذا كان نصف القطر المتوسط للأرض الكروية هو R فإن الاحداثيات للنقطة على الخريطة تكون مساوية:

$$x = \frac{R}{2} \ \ell n \ \frac{1 + cos\phi \ cos \ (\lambda_o - \lambda)}{1 - cos\phi \ cos \ (\lambda_o - \lambda)} \ , \quad (46)$$

$$y = R \ tan^{-1} \ (cot\phi \ sin(\lambda_o - \lambda)) \ . \quad (47)$$

معادلات التحويل لأسقاط ميركاتور المستعرض
للشكل الأسفرويدى للأرض

أن الحصول على معادلات التحويل فى اسقاط ميركاتور المستعرض للشكل الأسفرويدى للأرض يتطلب استخدام الرياضيات العالية وتطبيق الدوال المترافقة على المساقط التشابهية وكذلك نظريات الأعداد المركبة ومفكوك تيلور. ويمكن الرجوع فى ذلك الى مؤلف Thomas (١٩٥٢)، Krakiwsky (١٩٩٥). وفيما يلى نقدم معادلات التحويل كما تم الحصول عليها وملاحظات عن تطبيقها للحصول على الاحداثيات فى الخريطة (X , Y) بدلالة الاحداثيات الجغرافية (ϕ, λ) لاى نقطة على السطح الاسفرويدى للأرض.

$$X = N \Big[\grave{\lambda} \cos\phi + \frac{\grave{\lambda}^3 \cos^3\phi}{6} (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\grave{\lambda}^5 \cos^5\phi}{120} (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2 + 13\eta^4 + 4\eta^6 - 64\eta^4t^2 - 24\eta^6t^2) + \frac{\grave{\lambda}^7 \cos^7\phi}{5040} (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6.) \Big] \quad (48)$$

$$Y = S_\phi + N \Big[\frac{\grave{\lambda}^2}{2} \sin\phi \cos\phi + \frac{\grave{\lambda}^4}{24} \sin\phi \cos^3\phi \,(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)$$
$$+ \frac{\grave{\lambda}^6}{720} \sin\phi \cos^5\phi \,(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2$$
$$+ 445\eta^4 + 324\eta^6 - 680\eta^4t^2 + 88\eta^8 - 600\eta^6t^2 - 192\eta^8t^2)$$
$$+ \frac{\grave{\lambda}^8}{40320} \sin\phi \cos^7\phi \,(1385 - 311t^2 + 543t^4 - t^6) \Big] \tag{49}$$

ومعادلات التحويل هذه تعطى دقة فى تعيين قيم x ، y تصل إلى ٠,٠٠١ متر للمناطق على جانبى خط الطول الأوسط حتى ٣ °

حيث :

$\grave{\lambda}$ = الفرق بين خط طول النقطة λ وخط الطول الاوسط λ_{CM}

N = نصف قطر التقوس عند النقطة المطلوب اسقاطها وذلك فى الاتجاه العمودى على مستوى زوال النقطة. ويتم حسابه من المعادلة :

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2\phi)^{1/2}} \tag{50}$$

a = نصف القطر الأكبر للقطع الناقص زوال السطح الأسفرويدى.

e = الاختلاف المركزى الأول للقطع الناقص زوال السطح.

e' = الاختلاف المركزى الثانى للقطع الناقص.

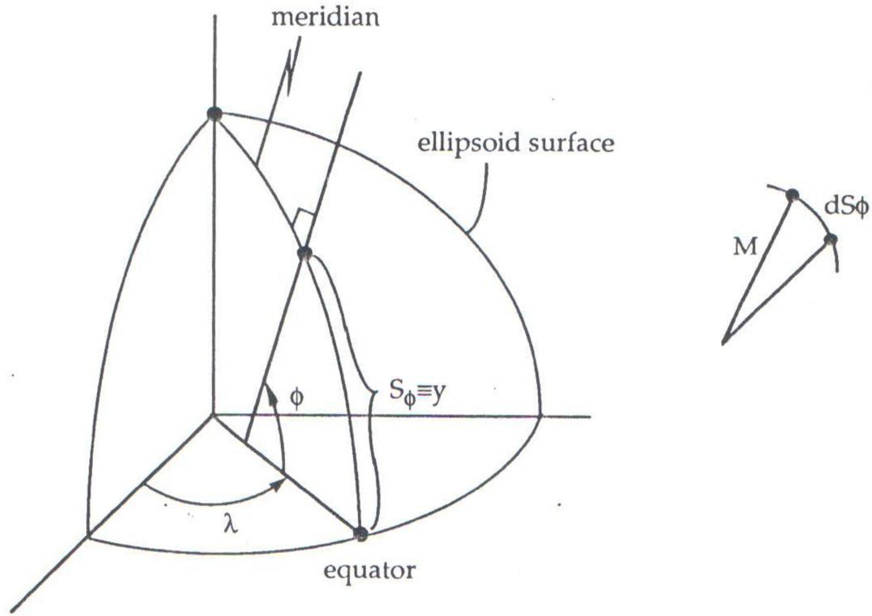
$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} \quad \text{first eccentricity} \tag{51}$$

$$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2} \quad \text{second eccentricity} \tag{52}$$

$$t = \tan\phi \quad , \tag{53}$$

$$\eta^2 = (e')^2 \cos^2\phi \tag{54}$$

S_ϕ = المسافة المقاسة على خط الطول الأوسط للمنطقة بين الاستواء وبين خط عرض النقطة ϕ (شكل ٣٢) حيث :



شكل (٣٢)

$$S = \int_{o}^{\phi} M d\phi = \int_{o}^{\phi} \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2\phi)^{3/2}} d\phi \quad (55)$$

وتكامل المعادلة (٥٥) يعطى

$$S = a\left[A_o\phi - A_2\sin 2\phi + A_4\sin 4\phi - A_6\sin 6\phi + A_8\sin 8\phi\right] \quad (56)$$

حيث

$$\begin{aligned}
A_o &= 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 \ , \\
A_2 &= \frac{3}{8}\left(e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \frac{15}{128}e^6 - \frac{455}{4096}e^8\right) \ , \\
A_4 &= \frac{15}{256}\left(e^4 + \frac{3}{4}e^6 - \frac{77}{128}e^8\right) \ , \\
A_6 &= \frac{35}{3072}\left(e^6 - \frac{41}{32}e^8\right) \ , \\
A_8 &= -\frac{315}{131072}e^8 \ .
\end{aligned} \quad (57)$$

وعند التعويض فى المعادلات (٥٧) يمكن استخدام القيم التالية:

$$e^4 = 4.5\ 10^{-5}$$
$$e^6 = 3.0\ 10^{-7}$$
$$e^8 = 2.0\ 10^{-9}$$

علما بأن الدقة فى حساب المسافة على خط الطول الأوسط بالمعادلة (٥٦) تصل إلى أقل من ٠,٠٠١ متر.

وفى الاعمال غير الدقيقة قد يستعاض عن حساب المسافة على خط الطول الأوسط من المعادلة (٥٦) بالقيم التقريبية الآتية :-

الطول على خط الطول المقابل لدرجة واحدة = ١١١,١٣٤٠ كيلو متر

الطول على خط الطول المقابل لدقيقة واحدة = ١٨٥٢,٢٥ متر.

الطول على خط الطول المقابل لثانية واحدة = ٣٠,٩ متر.

حساب زاوية التقارب فى اسقاط ميركاتور المستعرض: Meridian Convergence

ان حساب زاوية التقارب(γ = C) بين اتجاه خطوط الطول على الخريطة واتجاه شمال الخريطة (شكل ٣٣) يمكن حسابه لاى مسقط باستخدام المعادلة العامة التالية:

$$\tan\gamma = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} . \qquad (58)$$

وبتفاضل (٤٨ ، ٤٩) الخاصة بأسقاط ميركاتور المستعرض وبالتعويض فى المعادلة (٥٨) نحصل على :

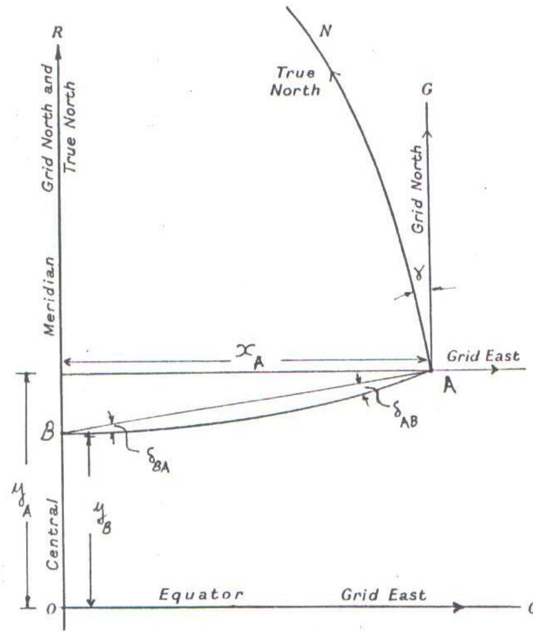
$$\tan\gamma = \grave{\lambda}\sin\phi\Big[\ 1 + \frac{\grave{\lambda}^2}{3}\cos\phi\ (\ 1 + t^2 + 3\eta^2 + 2\eta^4\ ) + \frac{\grave{\lambda}^4\cos^4\phi}{15}\ (\ 2 + 4t^2 + 2t^4 + 15\eta^2 + 35\eta^4 - 40t^2\eta^4 + 33\eta^6 - 60t^2\eta^6 + 18\eta^8 - 24t^2\eta^8\ ) + \frac{17}{315}(1 + t^2)^3\,\grave{\lambda}^6\cos^6\phi\ \Big] . \qquad (59)$$

وباستخدام مفكوك (ظا ^-۱^) يمكن الحصول على المعادلة التالية:

$$\gamma = \grave{\lambda} \sin\phi \left[1 + \frac{\grave{\lambda}^2 \cos^2\phi}{3(\rho'')^2}(1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{\grave{\lambda}^4 \cos^4\phi}{15(\rho'')^4}(2 - t^2) \right] \quad (60)$$

γ and $\grave{\lambda}$ are in radians; $\rho'' = \text{cosec } 1''$.

وهذه المعادلة تعطى دقة فى حساب γ تصل إلى ۰٫۰۱" وذلك لحدود الشريحة ذات فرق بين خطوط الطول يصل إلى ٦° (٣° على جانبى خط الطول الأوسط).



شكل (۳۳)

حساب معامل الرسم (K) فى اسقاط ميركاتور المستعرض: Scale Factor

ان المعادلة العامة لمعامل مقياس الرسم عند أى نقطة فى اى مسقط هى :

$$k = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{N \cos\phi} \quad (61)$$

ومن المعادلة (٥٨) نحصل على :

$$\tan^2\gamma = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}$$

ومنها يمكن كتابة المعادلة التالية :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 (1 + \tan^2\gamma) \quad . \tag{62}$$

وبالتعويض فى المعادلة (٦١) نحصل على صورة لمعادلة معامل مقياس الرسم كدالة فى التقارب على النحو التالى :

$$k = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda}\sqrt{1 + \tan^2\gamma}}{N\cos\phi} \quad . \tag{63}$$

ولما كانت قيم مربع ظل زاوية التقارب صغيرة فاننا يمكننا استخدام مفكوك الجذر التربيعى فى المعادلة (٦٣) وبعد التعويض بقيم زاوية التقارب واهمال الحدود ذات الرتبة الرابعة من المعادلة نحصل على المعادلة التالية :

$$k = 1 + \frac{\grave{\lambda}^2}{2}\cos^2\phi\,(1 + \eta^2) + \frac{\grave{\lambda}^4\cos^4\phi}{24}(5 - 4t^2) \tag{64}$$

ويجب التنوية هنا ألى أن قيم معامل مقياس الرسم تزاد لكل خط طول يتباعد عن خط الطول الأوسط ، وعلى نفس خط الطول الواحد تصغر قيمة معامل مقياس الرسم كلما زادت زاوية خط العرض.

التصحيح (للقوس - الوتر) فى اسقاط ميركاتور المستعرض:

يمكن حساب مقدار التصحيح (للقوس - الوتر) δ_{AB} عند النقطة A فى شكل (٣٣) بين القوس AB والوتر AB من المعادلة التالية:

$$\delta_{AB} = T - t = \frac{y_2 - y_1}{6N \cdot M}(x_2 + 2x_1) + \ldots \tag{65}$$

حـــيث تحسب قيم M ، N (أنصاف اقطار التقوس) عند خط العرض الأوسط بين النقطتين B , A .

أما التصحيح للقوس الوتر عند النقطة B فيحسب كالتالى :

$$\delta_{BA} = T - t = \frac{y_2 - y_1}{6N.M}(x_1 + 2x_2) + ... \quad (66)$$

حيث : (X_1 , Y_1) احداثيات نقطة A على الخريطة.

(X_2 , Y_2) احداثيات نقطة B على الخريطة

ويجدر التنوية هنا بان قيم التصحيح للقوس الوتر المحسوبة من هذه المعـادلات تكون بدقـة حوالى "٠,٠١" وذلك للخطوط حتى ١٦٠ كيلو متر وبدقـة لا تقل عن "٠,٢" للخطـوط أطـول من ذلك.

كـمـا يمكن حساب مقدار التصحيح (للقـوس – الوتـر) من المعادلة التالية:

Bomford [1962]

$$\delta_{AB} = T - t = \frac{(y_2 - y_1)(x_2 + 2x_1)}{6R_m^2}\left[1 - \frac{(2x_1 + x_2)^2}{27R_m^2}\right] \quad (67)$$

حيث :

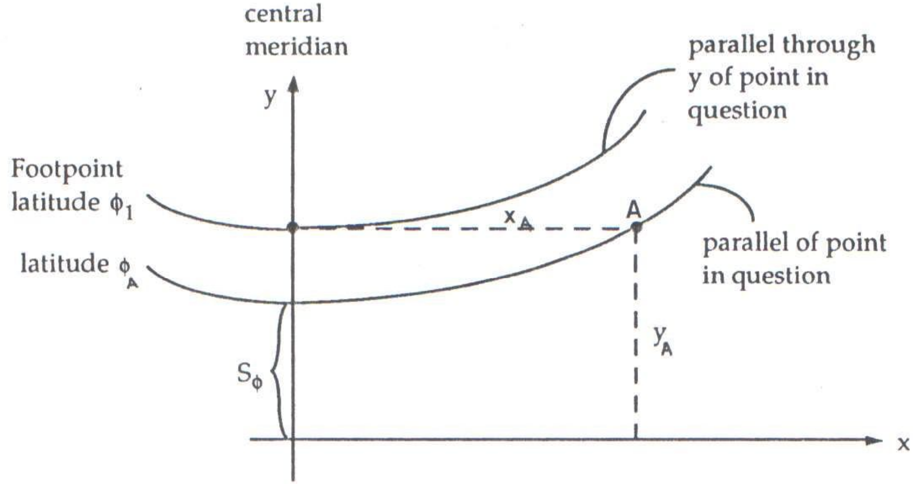
$$R_m = \sqrt{MN}$$

المسألة العكسية فى اسقاط ميركاتور المستعرض:

الغرض مـن المسـألة العكسية هو تحديـد الأحداثيـات الجغرافيـة لنقطـة معلـوم موقعها علـى الخريطة وبالتالى معلوم لها احداثياتها المستوية (X , Y) . ففى شكل (٣٤) نقطة (A) هـى النقطة المعلومة فى الخريطة والمطلوب تحديد خطى الطول والعرض المارين بها (ϕ, λ).

ولتسهيل الاستنتاج الرياضى لمعادلات التحويل فى هـذه الحالـة يتـم الاستعانة بخط عـرض (ϕ_1) يقطع خط الطول المتوسـط للخريطـة فـى نقطـة لهـا نفس الاحداثـى الرأسـى لنقطـة A. ويمكن الحصول على قيمة (ϕ_1) بالطرق العددية وبالاستعانة بالأحداثى (y) والمعادلة (٥٦) وعلى ذلك يكون خط عرض النقطة مساويا:

$$\phi_A = \phi_1 - \Delta\phi$$



شكل (٣٤)

ويمكن اثبات أن خط عرض النقطة (ϕ) يكون مساويا:

$$\phi = \phi_1 - \frac{t_1 x^2}{2M_1N_1} + \frac{t_1 x^4}{24\, M_1 N_1^3}\left(5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 4\eta_1^4 - 9\eta_1^2 t_1^2\right)$$

$$- \frac{t_1 x^6}{720\, M_1 N_1^5}\left(61 - 90t_1^2 + 46\eta_1^2 + 45t_1^4 - 252t_1^2\eta_1^2 - 3\eta_1^4 + 100\eta_1^6 - \right.$$

$$\left. - 66t_1^2\eta_1^4 - 90t_1^4\eta_1^2 + 88\eta_1^8 + 225t_1^4\eta_1^4 + 84t_1^2\eta_1^6 - 192t_1^2\eta_1^8\right) \tag{68}$$

$$+ \frac{t_1 x^8}{40320\, M_1 N_1^7}\left(1385 + 3633t_1^2 + 4095t_1^4 + 1575t_1^6\right) \quad ,$$

حيث قيم M_1, N_1, t_1, η_1 محسوبة عند خط العرض ϕ_1

$$t_1 = \tan \phi_1 \quad ,$$

$$\eta_1^2 = (e')^2 \cos^2 \phi_1 \quad ,$$

$$(e')^2 = (a^2 - b^2)/b^2 \quad .$$

وكذلك يكون مقدار ($\grave{\lambda}$) - الفرق بين خط طول النقطة وخط الطول الأوسط مساويا:

$$\grave{\lambda} = \sec \phi_1 \Big[\frac{X}{N_1} - \frac{1}{6}\left(\frac{X}{N_1}\right)^3 \left(1 + 2t_1^2 + \eta_1^2\right) + \frac{1}{120}\left(\frac{X}{N_1}\right)^5 \left(5 + 6\eta_1^2 + 28t_1^2 - 3\eta_1^4 + 8t_1^2\eta_1^2 + 24t_1^4 - 4\eta_1^6 + 4t_1^2\eta_1^4 + 24t_1^2\eta_1^6\right) - \frac{1}{5040}\left(\frac{X}{N_1}\right)^7 \left(61 + 662t_1^2 + 1320t_1^4 + 720t_1^6\right) \Big] , \quad (69)$$

ويجدر الاشاره هنا الـى أن قيـم ϕ ، $\grave{\lambda}$ المحسوبة مـن المعادلـة (٦٨) ، (٦٩) تكـون بدقـة ± ٠,٠٠٠٠١" وذلك اذا كانت λ فى حدود ٣ ° عن خط الطول الأوسط.

تعيين التقارب بدلالة الأحداثيات فى الخريطة:

إذا ما أريد تعيين زاوية التقارب عند نقطة على الخريطة معلوم لهـا (X , Y) فإنـه يتـم أولا حساب خط العرض المساعد ϕ_1 المناظر للأحداثى الرأسى y للنقطـة والـذى يتم تحديـده كمـا سبق وان بينا. وعلى ذلك تحسب زاوية التقارب (γ) من المعادلة الآتية :

$$\tan \gamma = \frac{t_1}{N_1} x - \frac{t_1}{3}\left(\frac{x}{N_1}\right)^3 \left(1 - \eta_1^2 - 2\eta_1^4\right) + \frac{t_1}{15}\left(\frac{x}{N_1}\right)^5 \left(2 + 2\eta_1^2 + 9\eta_1^4 + 6t_1^2\eta_1^2 + 20\eta_1^6 + 3t_1^2\eta_1^4 - 27t_1^2\eta_1^6 + 11\eta_1^8 - 24t_1^2\eta_1^8\right) - \frac{17t_1}{315}\left(\frac{x}{N_1}\right)^7 . \quad (70)$$

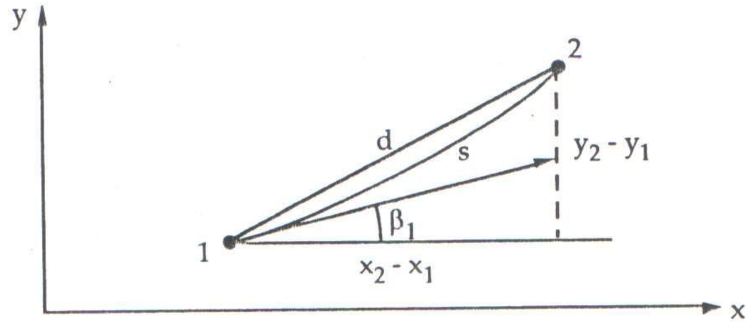
تعيين معامل مقياس الرسم بدلالة الأحداثيات فى الخريطة:

يكون معامل مقياس الرسم K عند نقطة معلوم احداثياتها على الخريطة مساويا:

$$k = 1 + \frac{1 + \eta_1^2}{2}\left(\frac{x}{N_1}\right)^2 + \frac{1 + 6\eta_1^2 + 9\eta_1^4 + 4\eta_1^6 - 24t_1^2\eta_1^4 - 24t_1^2\eta_1^6}{24}\left(\frac{x}{N_1}\right)^4 - \frac{1}{720}\left(\frac{x}{N_1}\right)^6 . \quad (71)$$

مقياس الرسم المتوسط لخط فى اسقاط ميركاتور المستعرض:

يقصد بمقياس رسم الخط النسبة بين الطول الحقيقى لخط وطول مسقطه على الخريطة. كما يمكن تعريفه بالقيمة المتوسطة لمقاييس رسم النقط المختلفة الواقعة على هذا الخط. وفى حالة اسقاط خط جيوديسى واقع على السطح الاسفرويدى للارض باستخدام باستخدام مسقط ميركاتور المستعرض فان هذا الخط يظهر فى المسقط على شكل منحنى له طول (s) شكل (٣٥) فى حين أن طوله الحقيقى على سطح الارض (S). وعلى ذلك يكون مقياس الرسم لهذا الخط مساويا (S/s).وفى شكل (٣٥) إذا كان الوتر الواصل بين طرفى مسقط الخط



شكل (٣٥)

الجيوديسى طوله (d) فان هذا الطول يمكن حسابه من واقع الفرق بين الاحداثيات فى الخريطة لنقطتين البداية والنهاية للخط (١) ، (٢). ولما كان طول الخط (المسقط) الجيوديسى يساوى تقريبا طول الوتر فى الخريطة بين نهايتيه (أى أن d ≃ s) فان مقياس الرسم للخط يكون مساويا (S/d) . ويمكن حساب مقياس الرسم المتوسط للخط من المعادلة التالية:

$$\frac{S}{d} = \left[1 + \frac{1}{6N_1^2} \left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \right) \right] \qquad (72)$$

حيث N_1 تمثل نصف قطر التقوس المتوسط عند منتصف الخط $(N_1 = R_m)$.

وهذه المعادلة يمكن استخدامها بدقة مقبولة لمعظم الاعمال. الا انه فى الاعمال الجيوديسية الدقيقة يتم استخدام المعادلة التالية الاكثر دقة (Bomford 1962):

$$\bar{k} = 1 + \frac{x_u^2}{6R_m^2}\left(1 + \frac{x_u^2}{36R_m^2}\right) \qquad (73)$$

حيث $\bar{K}$ = مقياس الرسم المتوسط للخط

$$x_u^2 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

$$R_m = \sqrt{MN} \quad ,$$

وقيم **N, M** تحسب عند نقطة منتصف الخط (عند خط العرض الاوسط للخط). ودقة الحساب بهذه المعادلة تصل إلى ٠,١٠ × ١٠ ^-٦^ من طول الخط وذلك للخطوط حتى طول ١٦٠ كيلو متر داخل الشريحة المسقطة والتى حدودها ٣° عن الخط الاوسط.

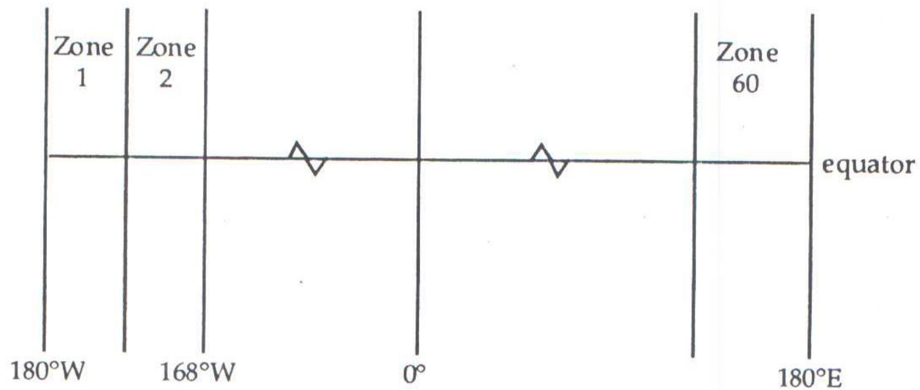
اسقاط ميركاتور المستعرض العالمى

Universal Transverse Mercator (UTM)

ان اسقاط ميركاتور المستعرض العالمى مبنى اساسا على اسس اسقاط ميركاتور المستعرض وقد صممت به خرائط تغطى سطح الارض جميعها بحيث تمثل كل خريطه شريحة من سطح الارض محصوره بين خطى طول المسافة بينهما تناظر ٦ °. وفيما يلى أهم الخواص والمواصفات لهذا النوع من الأسقاط:

١ - قسم محيط سطح الارض (الأستواء) الى ٦٠ قسم متساوى كل قسم يمثل شريحة عرضها ٦ ° من خطوط الطول.

٢ - تم ترتيب هذه الشرائح بأرقام حيث كانت الشريحة رقم (١) هى المحصورة بين خطى طول ١٨٠ ° ، ١٧٤ ° غربا . وآخر شريحة رقم (٦٠) محصورة بين خطى طول ١٧٤ ° ، ١٨٠ ° شرقا كما هو موضح فى شكل (٣٦).



شكل (٣٦) UTM Zones

٣ - خط الطول الاوسط فى الشريحة وخط الاستواء هما خطى الطول والعرض الرئيسيين لأسقاط هذه الشريحة.

٤ - وحدات الأطوال المستخدمة فى هذا النظام هى المتر.

٥ - اختيرت نقطة الاصل فى اسقاط أى شريحة بحيث أن ($y_0 = 0$) للنصف الشمالى للأرض ، ($y_0 = 10,000,000$ m) للنصف الجنوبى ، وبحيث تكون $x_0 = 500,000$ m وذلك حتى تكون الاحداثيات فى الخريطة لاى نقطة فى الشريحة موجبة دائما.

٦ - اختير معامل مقياس الرسم عند تصميم هذا النوع من المساقط بحيث يكون مساويا ٠,٩٩٩٦ عند خط الطول الاوسط لاى شريحة.ولما كان معامل مقياس الرسم (K) فى

اسقاط ميركاتور المستعرض يساوى:

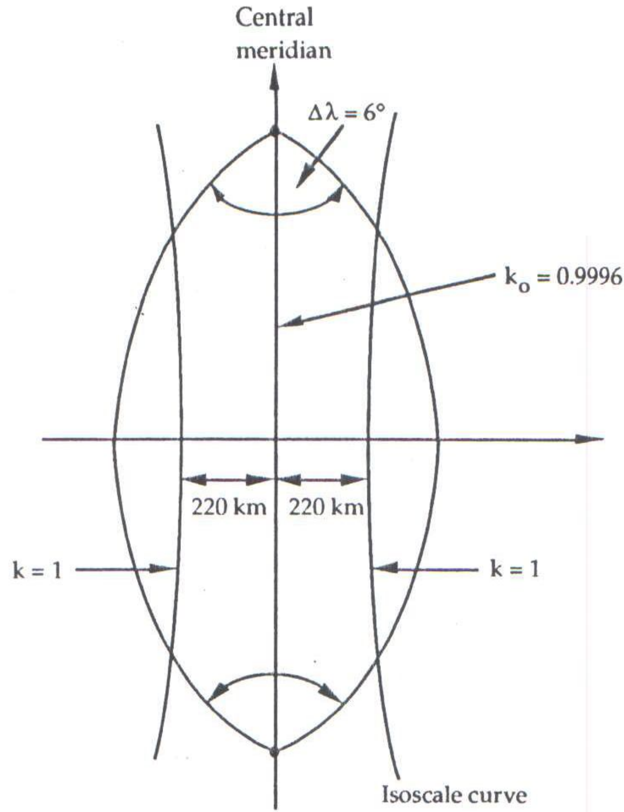
$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\cos^2\phi + \ldots \quad , \qquad (74)$$

فان مقياس الرسم فى اسقاط ميركاتور
المستعرض الدولى ستزداد قيمته كلما بعدنا عن خط الطول الاوسط حيث تصل قيمته الى الواحد الصحيح ثم اكبر من ذلك الى ان نصل الى حدود الشريحة كما هو موضح شكل (٣٧) . وعلى ذلك تكون معادلة معامل مقياس الرسم فى اسقاط **UTM** على النحو التالى:

$$k = k_o\left[1 + \lambda^2 \frac{\cos^2\phi}{2}\right] \quad , \qquad (75)$$

حيث ، K_0 هى معامل مقياس الرسم عند خط الطول الأوسط = ٠,٩٩٩٦ .

٧ - تكون قيمة معامل مقياس الرسم مساوية الوحدة وذلك عند خط عرض صفر وعلى بعد ٢° من خط الطول الأوسط وكذلك عند خط عرض ٤٠° وعلى بعد ٣° من خط الطول الأوسط. وإذا ما رسمنا المنحنى الذى تقع عليه النقط التى عندها يكون معامل مقياس الرسم مساويا الوحدة فان هذا المنحنى يقطع خط الاستواء على بعد حوالى ٢٢٠,٠٠٠ متر من خط الطول الأوسط كما هو مبين فى شكل (٣٧) والمنحنى يأخذ شكل منحنى مقلوب جيب التمام حيث يتغير شكل المنحنى ببطء عند الاستواء وبسرعة عند القطبين. واى منحنى تقع عليه نقط لها نفس معامل مقياس الرسم يكون أيضا على نفس شاكلة المنحنى السالف الذكر ، ويطلق على هذه المنحنيات اسم **Isoscale Curves** كما هو موضح فى شكل (٣٧).



شكل (٣٧) Scale Factor on the UTM

٨ - المعادلات المستخدمة فى اسقاط ميركاتور المستعرض العالمى **(UTM)** هى صورة من المعادلات المستخدمة فى اسقاط ميركاتور المستعرض **TM** وتكون على النحو التالى:

أولا : معادلات التحويل:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{UTM} = k_o \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{TM} \quad (76)$$

ثانيا : بالنسبة للتقارب :

$$\gamma_{UTM} \equiv \gamma_{TM} \quad (77)$$

ثالثا : بالنسبة لمعامل مقياس الرسم :

$$k_{UTM} \equiv k_o k_{TM} \quad (78)$$

حيث K_o هى معامل مقياس الرسم عند خط الطول الاوسط فى اسقاط **UTM** كما سبق وان ذكرنا.

ثانياً: المساقط المخروطية

Conical Projections

يعتبر الأسقاط المخروطي من أشهر الأسقاطات و أكثرها استعمالاً في انشاء الخرائط للأ غراض المختلفة.و عادة يتم الإسقاط في أي نوع منها على سطح مخروط يمس سطح الأرض على امتداد دائرة غالباً ما تكون أحد خطوط العرض، أو يقطع هذا المخروط سطح الأرض في دائرتين من دوائر العرض. وإذا ما قُطع المخروط المستخدم في الإسقاط على امتداد أحد رواسمه ثم فرد سطحه حتى يكون مستويا ً فإ نّ هذا السطح المستوي الناتج يكون هو الخريطة المطلوبة حيث تظهر عليه دائرة التماس على شكل قوس من دائرة مركزها هو رأس المخروط و نصف قطرها هو طول الراسم من رأس المخروط إلى موضع التماس و يكون طول هذا القوس ذاته طول محيط دائرة التماس الحقيقي و على ذلك يكون معامل مقياس الرسم على امتداد هذا القوس مساوياً الوحدة (راجع شكل (٧) & شكل(٨)).و جميع خطوط العرض تظهر في هذا النوع من المساقط على شكل دوائر متحدة المركز و بأنصاف أقطار مختلفة كما هو واضح في شكل (٧) أما خطوط الطول فتظهر في المسقط على شكل خطوط مستقيمة متلاقية في نقطة واحدة هي مركز تقوس دوائر خطوط العرض في الخريطة كما هو واضح في نفس الشكل (٧) وتصنع هذه الخطوط مع بعض زوايا متساوية.

و معظم المساقط المخروطية المستخدمة من النوع العادي، أي الذي يكون فيه محور المخروط متحداً مع محور الأرض، وعلى ذلك عند اسقاط منطقة ما اسقاطاً مخروطياً فإننا نختار خط العرض الأوسط في المنطقة بحيث يكون هو خط التماس بين المخروط و سطح الأرض.

ولما كان هذا الخط سيظهر في الخريطة بطوله الحقيقي و بدون تشويه، فإن المساقط المخروطية تستخدم لتمثيل مناطق من سطح الأرض تمتد على جانبي خط عرض التماس لمسافة محدودة وذلك لأن التشويه يزداد باطراد كلما بعدنا عن خط عرض التماس(خط التشويه الصفري) كما هو واضح في شكل (٨).

وعلى ذلك تعتبر المساقط المخروطية مثالية عند تمثيل المناطق الممتدة امتداداً محدوداً بين خطوط العرض و امتداداً لا حدود له بين خطوط الطول.

و هناك العديد من المساقط المخروطية التي تنشأ بأسا ليب متنوعة لتحقق خصائص و شروط معينة. وأهم هذه المساقط:

١-المسقط المخروطي متساوي المسافات.

٢-المسقط متعدد المخاريط.

٣-المسقط المخروطي متساوي المسافات بعرضين رئيسيين.

٤-المساقط المخروطية متساوية المساحات.

٥-مسقط لامبرت المخروطي متساوي المساحات.

٦-مسقط بون المخروطي متساوي المساحات.

٧-المسقط المخروطي متساوي المساحات بعرضين رئيسين.

٨-مسقط لامبرت المخروطي التشابهي.

٩-المسقط المخروطي التشابهي بعرضين رئيسيين.

وفي كل هذه المساقط يطلق على دائرة عرض التماس بالعرض الرئيسي و يرمز له بالرمز ϕ_0 . كما أن دائرة العرض التي تتوسط دائرتي

التقاطع (في حالة المخروط القاطع)يرمز لها أيضاً ϕ_0.و لتسهيل الأعمال الحسابية يختار في المنطقة خط طول أوسط يطلق عليه λ_0 بحيث يتم الإسقاط لنصف المنطقة والنصف الثاني يتم انشاءه بالتماثل.

وفيما يلي سوف نتناول اسقاط لامبرت المخروطي التشابهي كمثال نبين فيه جميع المتطلبات الخاصة به مثل معادلات التحويل سواء عند اسقاط الشكل الكروي أو الأسفرويدي للأرض،و حساب زوايا التقارب و التصحيح للقوس الوتر وتحديد معامل مقياس الرسم عند أي

نقطة والحالة العكسية فيه. وبمثل ما يتبع في اسقاط لامبرت المخروطي التشابهي يمكن التعامل مع أي مسقط مخروطي

آخر حسب المتطلبات الهندسية للمسقط المطلوب.

اسقاط لامبرت المخروطي التشابهي

Lambert's Conical Orthomorphic Projection

حسب التقسيم الذي أوردناه للمساقط المختلفة فإن اسقاط لامبرت المخروطي التشابهي يمكن تصنيفه كالتالي:

١-من حيث سطح الإسقاط : مخروطي

٢-من حيث وضع المخروط : اسقاط عادي ينطبق فيه محور المخروط مع محور الأرض.

٣-من حيث طريقة التحويل : رياضية للحصول إلى مسقط يحفظ الزوايا و تتحقق فيه النسب للخطوط المتناظرة.

٤-من حيث الخواص : اسقاط تشابهي و التشويه فيه يساوي الصفر على امتداد خط العرض الأوسط للمنطقة (خط التماس)

أولاً : اسقاط لامبرت المخروطي التشابهي

للشكل الكروي للأرض

شكل (٣٨) يوضح تماس مخروط الإسقاط مع السطح الكروي للأرض حيث خط العرض الأوسط للمنطقة هو ($\phi_\circ$) ونصف القطر المتوسط للأرض الكروية هو ($R_\circ$) ونصف قطر دائرة خط العرض الأوسط(r) . والمخروط المماس رأسه هو النقطة (C) وطول رواسمه هو ($l_\circ$) وسطح الإسقاط بعد افراده هو القطاع الدائري الذي زاويته المركزية(θ) وطول قوسه هو (L) ومن شكل (٣٨) نجد أن :

$$\frac{R_\circ}{l_\circ} = \tan\phi_\circ$$

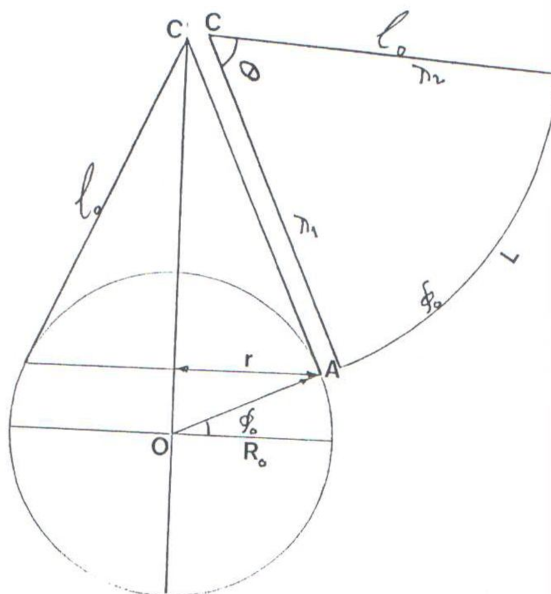
ومنها:

$$l_\circ = R_\circ \cot\phi_\circ \qquad ......(79)$$

ونصف قطر دائرة خط العرض الأوسط(r) يكون مساوياً :

$$r = R_\circ \cos\phi_\circ$$

وإذا كانت المنطقة المطلوب اسقاطها تمتد بين خطي طول λ_1, λ_2 فإن طول قوس التماس على خط العرض الأوسط بين المخروط و الإسطوانة لهذه المنطقة سيكون مساوياً:



شكل (٣٨)

$$(\lambda_2 - \lambda_1).r = (\lambda_2 - \lambda_1)R_\circ \cos\phi_\circ$$

ولما كان طول هذا القوس سيظهر بشكله الحقيقي في المسقط أي يساوي (L) حيث:

$$L = \theta.l_\circ = \theta.R_\circ.\cot\phi_\circ$$

فإن:

$$(\lambda_2 - \lambda_1).R_\circ.\cos\phi_\circ = \theta.R_\circ.\cot\phi_\circ$$

ومنها:

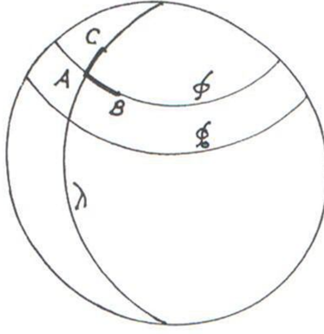
$$\theta = (\lambda_2 - \lambda_1)\sin\phi_\circ \qquad ....(80)$$

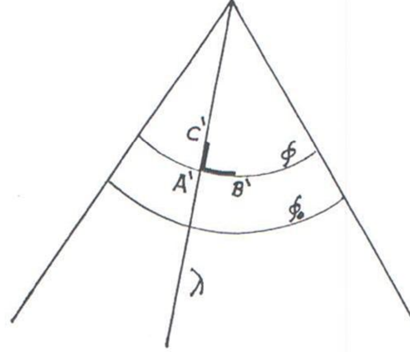
ويطلق على الزاوية (θ) **بثابت المخروط** وهو النسبة بين مقدار الزاوية بين أي خطي طول في الخريطة و الفرق الحقيقي بين مقدار خطي الطول على الأرض (النسبة بين زوايا الطول على الخريطة وزوايا الطول على الأرض).

و بذا نكون قد حصلنا على معادلات التحويل من الإحداثيات الجغرافية (λ , ϕ) إلى الإحداثيات القطبية(θ , 1) اللازمة لتعيين النقط الواقعة على خط العرض الأوسط في الخريطة.

و خاصية التشابه في هذا المسقط تحقق التعامد بين خطوط الطول وخطوط العرض كما تعطي تناسباً في الأبعاد المرسومة على المسقط مع نظيراتها على سطح الأرض. وعلى ذلك يتم حساب أنصاف أقطار دوائر العرض إلى االشمال و الجنوب من خط العرض الأوسط بحيث تحقق خاصية التشابه -أي عطي تناسباً في الأبعاد.

فبفرض أن نقطة(A) تقع على خط العرض (ϕ) إلى الشمال من خط العرض الأوسط(ϕ∘) كما هو مبين في شكل (٣٩) حيث يمر بها خط الطول (λ) على سطح الأرض الكروي وأخذنا مسافتين متناهيتين في الغر على خطي الطول و العرض المارين بنقطة (A)و كانت المسافة المأخوذة على خط العرض هي AB وعلى خط الطول هي AC فإن المسافات الناظرة لها على الخريطة المسقط ستكون`A`B, `A`C.





شكل(٣٩)

فإذا كانت قيمة نصف قطر دائرة العرض ϕ على المسقط (l_ϕ) فإن :

$AB = R_\circ . \cos\phi_\circ . d\lambda$

$AC = R_\circ . d\phi$

$A`C` = -d\, l_\phi$

$A`B` = l_\phi . d\theta$

حيث:

$d\theta = d\lambda . \sin\phi_\circ$

فرق خطوط الطول المقابل للمسافة $AB = d\lambda$

فرق خطوط العرض المقابل للمسافة $AC = d\Phi$

وتتحقق خاصية التشابه إذا ما كان :

$$\frac{A`C`}{AC} = \frac{A`B`}{AB}$$

أي عندما يكون:

$$\frac{-d\,l_{\phi}}{R_{\circ}.d\phi} = \frac{l_{\phi}.d\theta}{R_{\circ}.\cos\phi.d\lambda} = \frac{l_{\phi}.d\lambda.\sin\phi_{\circ}}{R_{\circ}.\cos\phi.d\lambda}$$

$$\frac{-dl_{\phi}}{l_{\phi}} = \frac{\sin\phi_{\circ}.d\phi}{\cos\phi} = \sin\phi_{\circ}.\sec\phi.d\ \ \phi$$

وبإجراء التكامل:

$$\int_{l_{\circ}}^{l_{\phi}} \frac{dl_{\phi}}{l_{\phi}} = -\sin\phi_{\circ}\int_{\phi_{\circ}}^{\phi} \sec\phi\ d\phi$$

$$\left[l_n\, l_{\phi}\right]_{l_{\circ}}^{l_{\phi}} = -\sin\phi_{\circ}\left[l_n\ \tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})\right]_{\phi_{\circ}}^{\phi}$$

ومنها:

$$\frac{l_{\phi}}{l_{\circ}} = \left[\frac{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_{\circ}}{2})}\right]^{-\sin\phi_{\circ}}$$

وبذا يكون نصف قطر دائرة خط العرض ϕ في المسقط مساوياً:

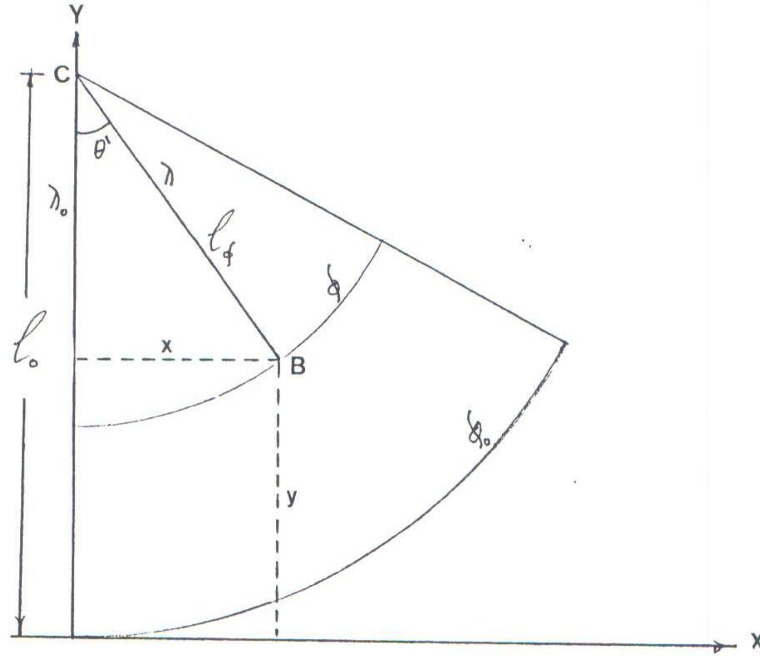
$$l_{\phi} = l_{\circ}\left[\frac{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi_{\circ}}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2})}\right]^{\sin\phi_{\circ}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(81)$$

وباستخدام المعادلتين (٨٠) & (٨١) يمكن الحصول على الإحداثيات القطبية (l_{ϕ}, θ) لأي نقطة لها احداثيات جغرافية (ϕ, λ) وذلك بالإستعانة بنصف القطر ($l_{\circ}$) .

وعادة عند رسم الخرائط يفضل استخدام الإحداثيات المستوية x & y بدلاً من الإحداثيات القطبية.لذا يختار في الخريطة محورين متعامدين احداهما هو خط الطول الأوسط للمنطقة (λ_0) ليمثل المحور الرأسي (شكل ٤٠) والأخر العمودي عليه هو المماس للدائرة الممثلة لخط العرض الأوسط في المنطقة(ϕ_0) .و نقطة أصل الإحداثيات هي نقطة تقاطع المحور الرأسي (y) مع المحور الأفقي (x) .

وعلى ذلك لتمثيل أي نقطة مثل B في الخريطة من واقع احداثياتها الجغرافية(λ , ϕ) فإننا نقوم أولاً بحساب نصف قطر للدائرة الممثلة لخط عرض النقطة من واقع المعادلة (٨١) وذلك بمعلومية نصف قطر الدائرة الممثلة لخط العرض الأوسط. ثم نقوم بحساب الزاوية (θ') المحصورة في الخريطة بين خط طول النقطة و خط الطول الأوسط . أي المناظرة لفرق خطوط الطول قدره λ' حيث :

$$\lambda' = \lambda - \lambda_0$$
$$\theta' = \lambda' . \sin \phi_0$$



شكل (٤٠)

ومن شكل (٤٠) يمكن تعيين الإحداثيات المستوية لنقطة (B) كالتالي:

$$x = l_{\phi}.\sin\theta' \qquad y = l_{\circ} - l_{\phi}.\cos\theta' \qquad \text{.........................(82)}$$

مثال:

المطلوب تمثيل شبكة خطوط الطول و العرض مستخدماً اسقاط لامبرت المخروطي التشابهي و ذلك كل درجتين من خطوط العرض ودرجتين من خطوط الطول للمنطقة الممتدة بين خطي عرض ٥٢° شمالاً & ٦٠ شمالاً وبين خطي طول ٦° غرباً & ٤° شرقاً. مثل على هذه الخريطة موضع النقطة التي احداثياتها الجغرافية (ϕ = ١٠´ ٥٩° شمالاً & λ = ٢٢´ ١° شرقاً). استخدم الشكل الكروي للأرض ومقياس رسم ١:٢ مليون.

الحل:

نصف القطر المتوسط للأرض = ٦٣٧٠ كيلومتر

نصف القطر بالمقياس المطلوب = ٣١٨ز٥٠سم

خط العرض الأوسط في المنطقة = شمالاً $56^{\circ} = \frac{52^{\circ} + 60^{\circ}}{2}$

خط الطول الأوسط في المنطقة = غرباً $1^{\circ} = \frac{4^{\circ}\ \text{شرقا} + 6^{\circ}\ \text{غربا}}{2}$

نصف قطر دائرة خط العرض الأوسط في الخريطة = $l_{\circ}$

$l_{\circ} = R_{\circ} \cot \phi_{\circ} = 318.50 . \cot 56^{\circ} = 214.83$ cm

الزاوية بين أي خطي طول في الخريطة و المناظرة لدرجتين من خطوط الطول = θ_1

$\theta_1 = 2^{\circ} \sin 56^{\circ} = 1^{\circ}\, 39'\, 29''$

الزاوية بين خط الطول الأوسط و بين أول خط طول إلى يمينه أو يساره = θ_2

$$\theta_2 = 1^\circ \sin 56^\circ = 00^\circ\ 49'\ 44.5''$$

الزاوية بين خطي طول ٦ْ غرباً & ٤ْ شرقاً = θ

$$\theta = 10^\circ \sin 56^\circ = 8^\circ\ 17'\ 25.35''$$

أنصاف أقطار دوائر خط العرض في الخريطة ستكون مساوية (راجع المعادلة ٨١):

$$l_{52} = l_\circ \left[\frac{\tan(45^\circ + 28^\circ)}{\tan(45^\circ + 26^\circ)}\right]^{\sin 56^\circ} = 237.08\ cm$$

$$l_{54} = 225.95\ cm$$

$$l_{58} = 203.71\ cm$$

$$l_{60} = 192.576\ cm$$

وفي شكل (٤١) مبين كروكي للخريطة المطلوبة بخط عرض أوسط ٥٦ْ شمالاً وخط طول أوسط ١ْ غرباً. وخطوط الطول تتباعد عن بعضها بزوايا متساوية المفروض أن تكون كل منها مساوية ٢٩" ٣٩' ١ْ وهي تناظر درجتين من خطوط الطول على سطح الأرض. وخطوط العرض أقواس من دزائر متحدة المركز . وبأنصاف أقطار تساوي القيم المحسوبة.

و لتمثيل أي نقطةبالاحداثيات المستوية(x, y) أخذ المحور الصادي (y) منطبقاً على خط الطول الأوسط، والمحور السيني (x يمر بنقطة تقاطع دائرة خط العرض الأوسط مع المحور الصادي وعمودي على المحور الصادى (مماساً لدائرة خط العرض الأوسط).

ثانياً :اسقاط لامبرت المخروطي التشابهي

للشكل الإسفرويدي للأرض

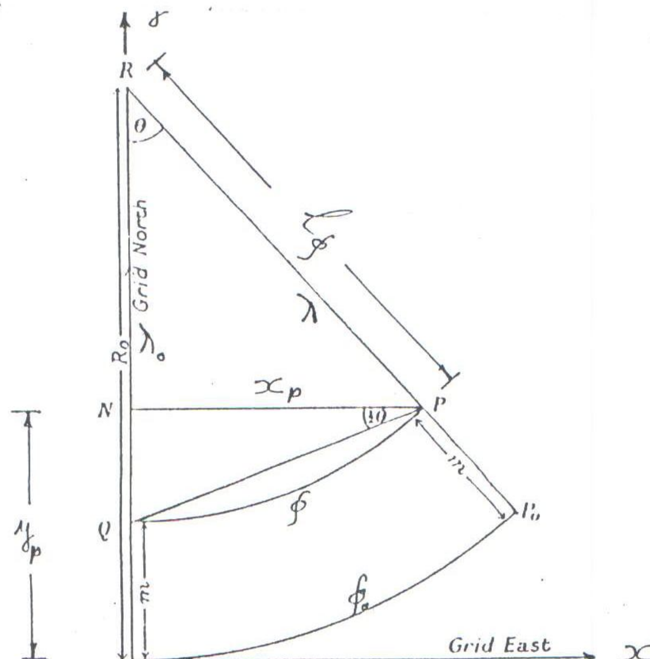
شكل(٤٢) يوضح تماس مخروط الإسقاط للسطح الأسفرويدي للأرض حيث دائرة التماس هي خط العرض الأوسط للمنطقة ϕ_0 . ونصف قطر دائرة التماس هذه هو(x) . فإذا كانت النقطة (A) واقعة على الزوال وعلى خط العرض الوسط كما في الشكل وكان AB هو العمودي على السطح المماس عند هذه النقطة فإن الطول AB يكون مساوياً لنصف قطر التقوس للسطح الأسفرويدي عند النقطة A في المستوي العمودي على مستوى الزوال ويكون مساوياً (N_0) . فإذا ما كانت النقطة C هي رأس مخروط التماس فإن الزاوية ABC تكون مساوية ($90°-\phi_0$) وبذا يكون طول راسم المخروط l_0 مساوياً:

$$l_0 = N_0 . Cot\phi_0 \qquad ....(83)$$

وبمثل ما اتبع في اسقاط السطح الكروي للأرض فإنه يمكن اثبات أن ثابت المخروط θ يكون مساوياً:

$$\theta = (\lambda_2 - \lambda_1).\sin\phi_0$$

وشكل (٤٣) يبين افراد جزء من سطح المخروط (الخريطة المسقط) بين خطي طول، الأول هو خط الطول الأوسط في المنطقة-حيث OR يمثل هذا الخط على الخريطة- أما الخط الثاني فهو الذي يمر بنقطة على السطح مسقطها هو النقطة P وبذا يكون مسقط هذا الخط على الخريطة هو الخط RP والذي يصنع مع مسقط الخط الأول الزاوية (θ) .



شكل (٤٢)

والقوس الدائري OP_0 يمثل مسقط خط العرض الأوسط في المنطقة ϕ_0 (دائرة تماس المخروط مع سطح الأرض). أما القوس QP فيمثل خط عرض المكان ϕ .

وواضح أن جميع خطوط العرض أ قواس من دوائر مركزها هو النقطة R . فإذا اعتبرنا أن نصف قطر القوس OP_0 الممثل لخط العرض الأوسط هو R_0 فإن طول R_0 يكون مساوياً طول الراسم l_0 الذي يحسب من المعادلة (٨٣) . و يكون نصف القطر للقوس QP الممثل لخط العرض ϕ مساوياً الطول RP والذي يساوي بدوره الطول $RQ=l_\phi$ وعليه يكون:

$$l_\phi=R_0-OQ=R_0-m \qquad \text{.............................(84)}$$

وذلك إذا ما كانت النقطة p واقعة إلى الشمال من خط العرض الأوسط للمنطقة. والمقدار (m) يمثل المسافة على خط الطول بين خط العرض الأوسط للمنطقة و خط عرض النقطة المطلوب تمثيلها على الخريطة. ولما كان الإسقاط تشابهي فإن هذه المسافة تعدّل لتوفي بشرط التشابه، أي لكي يكون مقياس الرسم عند النقطة في اتجاه خط الطول مساوياً لمقياس الرسم في اتجاه خط العرض، والمسافة المعدلة (m) تحسب من المعادلة التالية:

$$m = S + \frac{S^3}{6.M.N} + \frac{S^4.\tan\phi_0}{24.M.N^2} - \frac{S^4.e^2\sin 2\phi_0}{12.M.N^2(1-e^2)}...... \qquad ......(85)$$

حيث:

m =المسافة المعدلة

ϕ_0 =خط العرض الأوسط في المنطقة

M =نصف قطر التقوس للسطح الإسفرويدي عند النقطة P في مستوى الزوال

N =نصف قطر التقوس للسطح الإسفرويدي عند النقطة P في المستوى العمودي على الزوال

e =الإختلاف المركزي الأول للقطع الناقص زوال السطح الإسفرويدي

S =الطول على خط الطول بين خط العرض الأوسط للمنطقة $\phi_\circ$ وخط العرض المار بنقطة P (أي خط العرض ϕ).

ويلاحظ أن نصف قطر دوائر العرض في المسقط يكون مسـاوياً ($R_\circ+m$) وذلـك للنقـط الواقعـة جنـوب خـط العـرض الأوسط للمنطقة وذلك إذا ما كانت المنطقة المطلوب عمل الخريطة لها تقع إلى الشمال من خط الإستواء.

وللحصول على معادلات التحويل في صورة احداثيات مسـتوية (x , y) بدلالـة الإحداثيـات الجغرافيـة (ϕ , λ) فإنـه بالرجوع إلى شكل(٤٣) نجد أن :

$$x = N\bar{P} = (R_\circ \pm m).\sin\theta$$
$$y = O\bar{N} = m \pm Q\bar{N}$$
$$= m \pm x.\tan\frac{\theta}{2} \quad \text{.............} \quad (86)$$

حيث الإشارة العليا في المعادلة تكون للنقط الواقعة إلى الشمال من خط العرض الأوسـط للمنطقـة في النصـف الشـمالي للأرض.

ويمكن حساب الإحداثي (y) من المعادلة:

$$y = R_\circ - l_\phi.\cos\theta$$
$$= R_\circ - x \cot\theta \quad \text{.....}(87)$$

وذلك للنقط الواقعة شمال خط العرض الأوسط للمنطقة.

$$y = l_\phi.\cos\theta - R_\circ \quad \text{..........} \quad (88)$$

للنقط الواقعة جنوب خط العرض الأوسط للمنطقة.

أما إذا أردنا الحصول على الإحداثيات الجغرافية (λ,ϕ) من واقع الإحداثيات المستوية (x , y) في الخريطة فإننا نلاحـظ من شكل (٤٣)أن:

$$\tan\theta = \frac{NP}{NR} = \frac{x_p}{R_o - y_p}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{x_p}{R_o - y_p} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(89)$$

فإذا كانت الإحداثيات الجغرافية المطلوبة للنقطة (p) هي (ϕ_p . λ_p) فإن الفرق بين خط طول النقطة λ_p وخط الطول الأوسط للمنطقة λ_o سيكون مساوياً $\Delta\lambda$ ويتم حسابه بمعلومية الزاوية المحسوبة θ من المعادلة التالية:

$$\Delta\lambda = \frac{\theta}{\sin\phi_o} \qquad \ldots\ldots(90)$$

وبذا يكون خط طول النقطة مساوياً:

$$\lambda_p = \lambda_o + \Delta\lambda \qquad \ldots\ldots(91)$$

ولتعيين خط عرض مكان النقطة يتم حساب المسافة المعدلة (m) بين خط عرض النقطة و خط العرض الأوسط مقاسة على خط الطول الأوسط وذلك من المعادلة :

$$m = y_p - x_p . \tan\frac{\theta}{2} \qquad \ldots\ldots(92)$$

وعادة ما يتم انشاء جدوال خاصة أو برامج على الحاسب الالي تربط بين قيم ϕ & m (المعادلة ٨٥) وذلك للأشكال المختلفة للأرض وعليه يتم تعيين خط عرض مكان النقطة p بمعلومية المسافة m المعينة من المعادلة (٩٢).

حساب زوايا التقارب في اسقاط لامبرت المخروطي التشابهي:

من شكل (٤٣) نلاحظ أن الزاوية بين مسقط أي خط طول وبين خط الطول الأوسط هي نفسها زاوية التقارب عند نقطة واقعة على خط الطول- أي الزاوية بين اتجاه الشمال الحقيقي المعين بمسقط خط الطول وبين اتجاه الشمال للخريطة والذي يحدده خط الطول الأوسط.

وعلى ذلك عند حساب زاوية التقارب عند نقطة يمر بها خط طول λ فإنه يتم حساب الفرق بين زاوية خط الطول هذا وبين زاوية خط الطول الأوسط للمنطقة λ_o - أي المقدار (δ long) - ومن ثم تكون زاوية التقارب عند هذه النقطة مساوية:

$$c = \gamma = (\delta\ \text{long.}).\sin\phi_\circ = \theta \qquad \ldots\ldots\ldots (93)$$

كما أن هذه الزاوية يمكن حسابها من واقع الإحداثيات المستوية للنقطة في الخريطة من المعادلة التالية:

$$c = \tan^{-1}\left(\frac{x}{R_\circ - y}\right) = \theta \qquad \ldots\ldots (94)$$

معامل مقياس الرسم:

يكون معامل مقياس الرسم على امتداد خط العرض الأوسط للمنطقة مساوياً $K_\circ$. و عند أي نقطة أخرى في الخريطة

يكون معامل مقياس الرسم K مساوياً:

$$K = K_\circ\left[1 + \frac{S^2}{2.N\,M} + \frac{S^3.\tan\phi_\circ}{6.M\,.N^2} + \frac{S^4(5+3.\tan^2\phi_\circ)}{24.M^2.N^2} + \ldots\ldots\right] \qquad \ldots.(95)$$

حيث :

$N \& M$ =أنصاف أقطار التقوس عند النقطة للسطح الأسفرويدي للأرض في مستوى الزوال وفي المستوي العمودي

على الزوال وذلك لشكل الأرض المطلوب.

S =المسافة على خط الطول بين خط العرض الأوسط وخط عرض النقطة.

ϕ° =خط العرض الأوسط للمنطقة

$K_\circ$ =معامل مقياس الرسم الحقيقي على امتداد خط العرض الأوسط للمنطقة و تكون قيمته مساوية الوحدة في هذا

النوع من الإسقاط. في بعض الأحيان يعطى قيمة أقل من الواحد(٠،٩٩٩)حتى نقلل على قدر الإمكان من التشويه

عند الحدود الدنيا و العليا للخريطة حيث أن مقياس الرسم يزيد عن قياس الرسم الأساس في هذه المناطق.

وفي عمليات الإسقاط الأقل دقة يمكن استخدام المعادلة التقريبية التالية لتعيين معامل مقياس الرسم عند أي نقطة في

اسقاط لامبرت المخروطي التشابهي:

$$K = 1 + \frac{m^2}{2.M\,.N} \qquad \ldots\ldots\ldots (96)$$

حيث:

M = المسافة المعدلة بين خط العرض الأوسط وخط عرض النقطة.

التصحيح للقوس – الوتر (T-t) :

إذا ما علمت الإحداثيات الجغرافية لنقطتي بداية و نهاية الخط، المطلوب حساب زوايا التصحيح (للقوس–الوتر) عند طرفيه فإن مقدار التصحيح (δ) يكون مساوياً:

$$\delta_{12} = \tfrac{1}{2}(\sin\phi_3 - \sin\phi_\circ)(\lambda_2'' - \lambda_1'')$$
$$\delta_{21} = \tfrac{1}{2}(\sin\phi_3' - \sin\phi_\circ)(\lambda_2'' - \lambda_1'') \quad \text{.........} \quad (97)$$

حيث:

δ_{12} =التصحيح الزاوي بالثواني محسوباً عند النقطة (١) للخط (١-٢).

δ_{21} =التصحيح الزاوي بالثواني محسوباً عند النقطة (٢) للخط (٢-١).

(Φ_1, λ_1) = الإحداثيات الجغرافية لنقطة (١).

(Φ_2, λ_2) = الإحداثيات الجغرافية لنقطة (٢).

$$\phi_3 = \tfrac{1}{3}(2\phi_1 + \phi_2)$$
$$\phi_3' = \tfrac{1}{3}(\phi_1 + 2\phi_2)$$

وللخطوط التي لا يزيد طولها عن ٢٤ كيلومتر يمكن حساب مقدار التصحيح للقوس–الوتر من واقع الإحداثيات المستوية عند نقطتي البداية و النهاية للخط من المعادلات التالية:

$$\delta_{12} = \frac{(x_1 - x_2)(2y_1 + y_2)}{6.M.N \sin 1''} \quad \text{......} (98)$$

حيث:

(x , y): الإحداثيات المستوية للنقط.

M , N : أنصاف أقطار التقوس للسطح الأسفرويدي للأرض في مستوى الزوال و المستوى العمودي عليه عند خط العرض الأوسط.

ولحساب الإنحراف الزوالي الحقيقي لخط يتم حساب الإنحراف الدائري من الخريطة ويتم تصحيحه بقيم C & δ بعد تحديد اتجاه التقوس للخط المنحني مسقط الخط الجيوديسي الواصل بين النقطتين.

<u>مقياس الرسم المتوسط لخط في اسقاط لامبرت المخروطي التشابهي:</u>

إذا كان الطول الحقيقي للخط الواصل بين النقطتين (١) ،(٢) على سطح الأرض هو (L) وكان طول مسقط هذا الخط على الخريطة هو (l) فإن مقياس الرسم المتوسط لهذا الخط يمكن حسابه من المعادلة التالية:

$$\lg\left(\frac{l}{L}\right) = 0.434295\left[\frac{1}{2.M.N}\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{6.M.N}\left(\frac{S_1-S_2}{2}\right)^2 + \frac{\tan\phi_\circ}{12.M.N^2}S_1.S_2(S_1+S_2)+\ldots\right] \quad (99)$$

حيث:

M , N : أنصاف أقطار التقوس المحسوبة عند خط العرض الأوسط $\phi_\circ$.

S_1 : المسافة على خط الطول بين خط العرض الأوسط و خط عرض نقطة (١).

S_2: المسافة على خط الطول بين خط العرض الأوسط و خط عرض نقطة (٢).

المسقط المركزى

يستخدم المسقط المركزى فى خرائط الملاحة البحرية و الجوية إذ أن الخط المستقيم الذى يصل بين مكانين مرسومين على الخريطة المرسومة يمثل أقصر مسافة بين هذين المكانين على سطح الأرض.

و مستوى المسقط فى حالة الإسقاط المركزى يكون مستوى يمس الأرض فى نقطة و مركز الإسقاط إما أن يكون مركز الأرض أو النقطة المقابلة لنقطة التماس على سطح الارض. وعلى ذلك لإسقاط دائرة عظمى مرسومة على سطح الأرض من مركز الإسقاط تمر أشعة الإسقاط فى نفس مستوى الدائرة العظمى إلى أن تقابل مستوى الخريطة والذى يكون موازيا لمستوى الدائرة العظمى فى خط مستقيم يمثل تلك الدائرة العظمى على سطح الخريطة المرسومة. ومن هنا يتضح أن كل خط مستقيم على سطح الخريطة المرسومة بالمساقط المركزية إنما يمثل دائرة عظمى على سطح الارض.

والمساقط المركزية عديدة – أهمها المساقط المركزية القطبية حيث سطح الخريطة يمس سطح الأرض عند القطب و مركز الإسقاط إما أن يكون مركز الأرض و يطلق فى هذه الحالة على هذا المسقط **المسقط الجونومونى Gonomonic Projection** أو يكون مركز الإسقاط فى الجهة المقابلة لنقطة التماس و يطلق عليه في هذه الحالة **المسقط الإستريوجرافيكى Sterographic Projection** .

و واضح فى كلا المسقطين أن خطوط الطول تسقط خطوط مستقيمة و تكون الزوايا بينهما مساوية للزوايا الأصلية بين خطوط الطول عند القطب، و واضح أيضاً أن دوائر العرض تسقط إلى دوائر مركزها هو نقطة القطب و لكن بأقطار أكبر من أقطارها الأصلية على سطح الأرض.

و سوف نتناول أحد المساقط المركزية و هو المسقط الإستريوجرافيكى :

المسقط الإستريوجرافيكى

Sterographic Projection

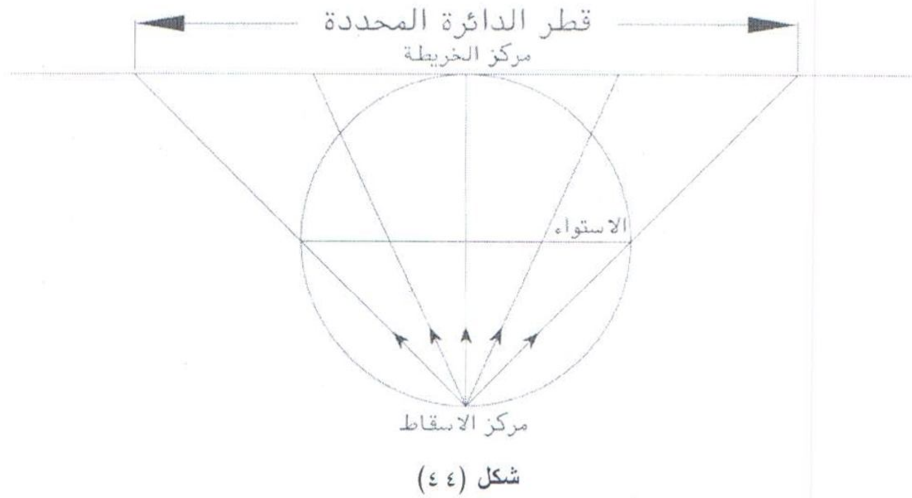
رغم أن المسقط الإستريوجرافيكى ينتج بطريقة الإسقاط المنظور إلا أنه يحقق خاصية التشابه. فالزاوية على المسقط بين أى خطين تساوى الزاوية الأصلية على سطح الارض بين الخطين المناظرين. و على ذلك تتعامد خطوط الطول و العرض على المسقط كما هى متعامدة على سطح الأرض. و كذلك تكون الزوايا على المسقط بين خطوط الطول و عرضها مساوية للزوايا الأصلية المناظرة على سطح الأرض.

و من المعروف أن المسار الظاهرى اليومى لأي جرم سماوى هو دائرة واقعة على سطح الكرة السماوية و التى محورها هو نفسه محور الأرض لذا يستخدم المسقط الإستريوجرافيكى فى الخرائط

الفلكية و ذلك لسهولة حل المسائل بيانياً عليه حيث يكون مسقط مسارات الأجرام السماوية فى هـذه الحالة دوائر مما يسهل الحل البيانى على المسقط .

و فى المسقط الإستريوجرافيكى واضح أن مقياس الرسم على الخريطة يكون مساوياً المقياس علـى سطح الأرض و ذلك عند نقطة التماس فقط (مركز الخريطة) و يأخذ المقياس فى المسقط فى الكبـر كلما بعدنا عن مركز الخريطة .

لذلك اتفق على رسم مسقط نصف الكرة الأرضية (التى يقع مركز الخريطـة عنـد منتـصفها) دون النصف الأخر كما هو مبين فى شكل(٤٤) .



شكل (٤٤)

و لما كان أي نصف للكرة الأرضية تحدده دائرة. و الدائرة على الأرض تسقط إلـى دائـرة علـى الخريطة لذلك يرسم المسقط الإستريوجرافيكى عادة داخل إطار دائرى يسمى الدائرة المحددة للمسقط كما في شكل (٤٤) .

و يمكن إستنتاج أن قطر الدائرة المحددة للخريطة الممثلة لنصف الكرة الأرضية يساوى ضعف قطر الارض .

الخصائص الهندسية للمسقط الإستريوجرافيكى القطبى

شكل (٤٥)

كما سبق أن ذكرنا، فان خطوط الطول ستظهر على شكل خطوط مستقيمة متلاقية في مركز الخريطة و تصنع زوايا بين بعض هى نفس الزوايا علي الأرض. فإذا كانت الزوايا بين أى خطى طول على الأرض هى (λ) و الزاوية بين نفس خطى الطول على الخريطة هى (θ) فإن :

$$\theta = \lambda \qquad \text{............} \quad (100)$$

أما خطوط العرض فتظهر دوائر ذات أنصاف أقطار أكبر من أنصاف أقطار دائرة العرض الحقيقية على الارض. ففي شكل (٤٥) إذا كان A ، A' ، A'' يمثل دائرة عرض Φ على الأرض و التى نصف قطرها R_{Φ} حيث :

$$R_{\Phi} = R \,.\, Cos\, \Phi$$

حيث نصف القطر المتوسط للأرض = R

فإن مسقط هذه الدائرة على مستوى المسقط سيكون دائرة نصف قطرها r_{φ} و من هندسة الـشكل (٤٥) نجد أن :

٤٥

$$P\hat{O}A'' = 90^\circ - \phi = 2\left(P\hat{P'}A_1\right)$$

و من المثلث $P\,P'\,A_1$ نجد أن :

$$\frac{r_\Phi}{2R} = Tan\left(P\,P'\,A_1\right) = Tan\left(\frac{90^\circ - \Phi}{2}\right)$$

و منها :

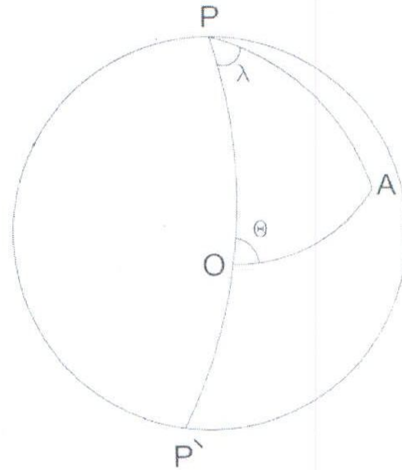
$$r_\Phi = 2\,R.Tan\left(45^\circ - \frac{\Phi}{2}\right) \quad .... \; (101)$$

و بالطبع فإنه عند إسقاط الشكل الإسفرويدى للأرض باستخدام هذا النوع من الإسقاط فإن R في المعادلة تمثل بنصف القطر المتوسط للسطح الإسفرويدى. أى أن :

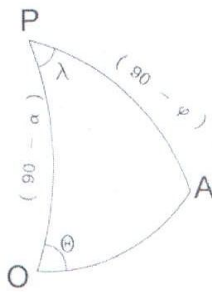
$$R = \sqrt{M.N}$$

حيث N , M تعتمد على شكل الأرض المتبع .

و عند استخدام هذا المسقط للخرائط المساحية لدولة صغيرة المساحة (أي صغيرة الإمتداد بين خطوط الطول و العرض) فإنه يتم اتخاذ مركز الخريطة عند نقطة تقع عند مركز الدولة و بذا فإن الأخطاء ستكون ضئيلة للغاية طالما أننا لا نبتعد كثيراً عن المركز لصغر المساحة و يمكن فى هذه الحالة إهمالها تماماً .



شكل (٤٦)



شكل (٤٧)

و في هذه الحالة إذا كانت O مركز الخريطة الواقعة عند خط العرض α و كانت A إحدى نقط الهيكل الجغرافى الواقعة عند خط العرض ϕ (شكل٤٦) و كانت الزاوية عند القطب بـين خطـى طول المركز O و النقطة A هى λ فإنه من المثلث الكرى OPA يمكن حساب قيمة الضلع OA بالدرجات(σ) و كذلك يمكن حساب قيمة زاوية الإتجاه θ $\left(P\hat{O}A\right)$. و فى حالة المثلثات الكرية الصغيرة يحسب الطول اولاً على قيمة زاوية الإتجـاه θ اولاً مـن العلاقـة /(راجـع المثلـث الكرى OPA في شكل (٤٧)) :

$$\boxed{Tan\ \theta = \frac{Sin\ \lambda}{Cos\ \alpha\ .\ Tan\ \phi - Sin\ \alpha\ .\ Cos\ \lambda}} \quad ....\ (102)$$

ثم نحصل على قيمة σ من العلاقة :

$$\boxed{Sin\ \sigma = \frac{Sin\ \lambda\ .\ Cos\ \phi}{Sin\ \theta}} \quad ....\ (103)$$

و المعالجة الرياضية لمعادلات المسقط تتم على أساس أن الإسقاط تشابهى باعتبار أن طول أى قوس على الأرض يناظره طول مستقيم على المسقط و زاوية الإتجاه θ تظل كما هى بدون تغيير.

و عندما تكون σ صغيرة تكون :

$$r_\phi = R\ .\ \sigma$$

و تكون

$$Tan\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \frac{\sigma}{2}$$

و تصبح

$$\boxed{r_\phi = 2\ R.Tan\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \quad ....\ (104)$$

و لسهولة التوقيع للنقط تستخدم الإحداثيات المتعامدة و نأخذ نقطة الأصل عند مركز الخريطة و يكون خط طول نقطة الأصل محوراً للصادات و العمودى عليه محوراً للسينات و علـــى ذلـــك تكـــون الإحداثيات المستوية للتوقيع هى :

$$x = r_{\phi} . Sin\theta = 2R . Tan\left(\frac{\sigma}{2}\right) . Sin\,\theta$$

$$y = r_{\phi} . Cos\,\theta = 2R . Tan\left(\frac{\sigma}{2}\right) . Cos\,\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (105)$$